Zur Theorie der Heineschen Reihe und ihrer Verallgemeinerung.

Inaugural-Dissertation

der

II. Sektion der philosophischen Fakultät

der

Königlichen Ludwig-Maximilians-Universität München

am 17. Juli 1911

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Edwin Raymond Smith.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

München 1911.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548308_0108

Inhaltsübersicht.

Seite

Vorwort 1

§ 1. Einleitung.

1. Die „allgemeinste" Heinesche Reihe 4
2. Zusammenstellung von bekannten Formeln 6
3. Die Pole 7
4. Die Differenzengleichung 8
5. Die K-Funktionen 12

§ 2. Die Pole.

6. Darstellung der Reihe h^{ter} Ordnung durch eine Reihe von Reihen $(h-1)^{\text{ter}}$ Ordnung 13
7. Partialbruch-Zerlegung 15
8. Verhalten der Funktion an den singulären Stellen 21
9. Asymptotische Darstellung 23

§ 3. Die Nullstellen der Heineschen Reihe.

10. Allgemeine Bemerkungen 25
11. Nullstellen für besondere Werte von α, β, γ 29

§ 4. Die Heinesche Differenzengleichungen und deren Verallgemeinerungen.

12. Allgemeine Form der Fundamentallösungen für die homogene Gleichung 30
13. Die vollständige Integration der homogenen Differenzengleichung 33
14. Die nichthomogene Gleichung 35
15. Die Gleichung zweiter Ordnung 36
16. Die Ausnahmefälle 40
17. Die zweite Lösung für $\gamma = 1$ 41
18. Die zweite Lösung für den Fall $1-\gamma$ gleich einer ganzen Zahl 43
19. Lösung der Heineschen Differenzengleichung durch eine unendliche Determinante 45

Seite

§ 5. Der Zusammenhang der Heineschen und hypergeometrischen Reihe.

20. Der Grenzfall $q = 1$ 49
21. Singuläre Stellen der hypergeometrischen Reihe 50
22. Lösungen der Heineschen Differenzengleichung in der Nähe von $x = 1$ 52
23. Anwendung auf die hypergeometrische Reihe 56

§ 6. Die Heinesche Reihe als Funktion von q und x.

24. Analytische Eigenschaften der Funktion 58
25. Die Singularitäten 61

Zur Theorie der Heineschen Reihe und deren Verallgemeinerung.

Die Reihe

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^{\beta})\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)(1-q^{2})\ldots(1-q^{\nu})(1-q^{\gamma})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})} x^{\nu}$$

ist durch Heine[1]) in die Analysis eingeführt. Er hat die Haupteigenschaften dieser Reihe rein formal entwickelt und in einigen Fällen auf die Theorie der elliptischen Funktionen angewandt. Herr Thomae[2]) hat auch auf eine allgemeine Reihe dieser Art eine ähnliche Methode angewandt, wie früher Riemann auf die gewöhnliche hypergeometrische Reihe. Daß diese Arbeit von Thomae sehr kompliziert und schwer zu übersehen ist, kommt von dem wesentlichen Unterschied zwischen der Gaußschen und der Heineschen Reihe. Die Heinesche Reihe definiert in einem noch so großen endlichen Bereiche eine eindeutige, bis auf Pole reguläre Funktion[3]). Die hypergeometrische Reihe, die aus der Heineschen Reihe für $\lim q = 1$ entsteht, ist im allgemeinen vieldeutig, und hat im Endlichen nur die einzige reguläre Stelle im Punkte $x = 1$, welcher, abgesehen von ganz speziellen Fällen, Verzweigungspunkt ist.

---

[1]) Heine, Journ. f. Math. 32 (1846), p. 210, und 34 (1847), p. 285; auch Handbuch der Kugelfunktionen I (2. Aufl., 1878), p. 97.

[2]) Thomae, Journ. f. Math. 70 (1869), p. 258.

[3]) Pringsheim, Sitzungsber. 40 (1910), p. 27.

Den unendlichen Kettenbruch, der aus dem Quotienten

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$$

entsteht, hat Heine wie auch Thomae betrachtet. Später hat Herr van Vleck[1]) die Gültigkeit dieser Entwicklung auf elementarem Wege bewiesen und die Haupteigenschaften dieser durch den Kettenbruch definierten Funktion abgeleitet. Mit Hilfe dieser Kettenbruchentwicklung hat dann Herr Pringsheim[2]) die Eindeutigkeit der durch die Heinesche Reihe definierten Funktion gezeigt.

In der letzten Zeit hat Rev. F. H. Jackson[3]) diese Reihe und verwandte Reihen mit Hilfe von funktionalen Operationen behandelt. Dabei hat er die sogenannte q-Integration definiert und die Heinesche Reihe als ein q-Integral geschrieben. Dieses Integral geht dann für $\lim q = 1$ in das gewöhnliche hypergeometrische über. Herr G. N. Watson[4]) hat bewiesen, daß die Reihe sich auch durch ein Kurvenintegral darstellen läßt, welches sodann die analytische Fortsetzung der durch die Reihe definierten Funktion liefert.

Die Heinesche Reihe läßt sich verallgemeinern, wenn man statt nur dreier Exponentenparametern α, β, γ die $2h$-Elemente

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$$

einführt. Diese Verallgemeinerung hat Thomae[5]), für $\beta_1 = 1$, als die Lösung einer Differenzengleichung der $(h+1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die Variable q definiert.

In der vorliegenden Arbeit soll die Heinesche Reihe und deren Verallgemeinerung erstens als Element einer analytischen Funktion der Veränderlichen x, zweitens als eine Lösung einer

---

[1]) Van Vleck, Annals of Math. 3, No. 1 (1901), p. 17.

[2]) Pringsheim, a. a. O., p. 26.

[3]) Jackson, Mess. of Math. 37 (1907), p. 23, und auch Quart. Journ. of Math. 41 (1910), p. 199.

[4]) Watson, Trans. Camb. Phil. Soc. 21 (1910), p. 281.

[5]) Thomae, Annali di Mat. (serie II) 4 (1870), p. 105.

Differenzengleichung in q und drittens als eine Funktion der beiden Veränderlichen q und x betrachtet werden. In der Einleitung § 1 sind die Resultate, von denen die meisten schon bekannt sind und die für diese Arbeit wichtig sind, zusammengestellt. In § 2 werden die Singularitäten der Reihe als Funktion von x betrachtet und im Anschluß daran wird die Partialbruchzerlegung für die betreffende analytische Funktion hergestellt. Der dritte Paragraph behandelt die Frage der Nullstellen, die freilich nur für spezielle Werte der Parameter vollständig erledigt wurde, während für den allgemeinen Fall nur beschränkte Resultate angegeben werden.

Herr Thomae hat in seiner Abhandlung über die durch die Heinesche Reihe darstellbaren Funktionen[1]) die Relationen zwischen den Lösungen der zugehörigen Differenzengleichung gefunden. Kürzlich hat Rev. Jackson[2]) durch Einführung eines von einem Parameter abhängigen Operationssymbols, welches für $q = 1$ in das gewöhnliche Differentiationssymbol übergeht, die Gleichung auf die Form einer verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung gebracht und die Lösungen der Gleichung aus dieser Form hergeleitet.

In § 4 soll nun die Theorie der Differenzengleichung in q von beliebig höherer Ordnung entwickelt werden, und die Lösungen sowohl der nicht homogenen als auch der homogenen Gleichung auf einfachem und elementarem Weg bestimmt werden. Der vorletzte Paragraph (§ 5) enthält eine Betrachtung über die Reihe für den speziellen Fall $\lim q = 1$, für welchen die Reihe sich auf die gewöhnliche hypergeometrische reduziert. Im letzten Paragraphen (§ 6) wird der analytische Charakter der durch die Heinesche Reihe definierten Funktion und ihrer Singularitäten betrachtet.

---

[1]) Thomae, Journ. of Math. 70 (1869), p. 258 und Annali d. Mat. (serie II) 4 (1870), p. 105.

[2]) Jackson, Americ. Journ. of Math. 32 (1910), p. 305.

§ 1.

Einleitung.

1. Die „allgemeinste“ Heinesche Reihe.

Es soll nach dem Vorgang von Thomae gesetzt werden:

$$(1)\quad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) = \sum_0^\infty{}_\nu f_\nu \left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) x^\nu,$$

wo

$$f_0\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) = 1$$

$$f_\nu\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{(1-q^{\alpha_1})(1-q^{\alpha_1+1})\ldots(1-q^{\alpha_1+\nu-1})(1-q^{\alpha_2})\ldots(1-q^{\alpha_h+\nu-1})}{(1-q^{\beta_1})(1-q^{\beta_1+1})\ldots(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2})\ldots(1-q^{\beta_h+\nu-1})} \quad (\nu \geqq 1).$$

Die obige Reihe wird im folgenden als „allgemeinste“ Heinesche Reihe bezeichnet.

Die gewöhnliche Heinesche Reihe erscheint dann als der spezielle Fall

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ 1, \gamma,\end{matrix} q, x\right),$$

für welche ich, um die sonst übliche einfache Schreibweise der Reihe festzuhalten, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ schreibe. Es ergibt sich somit die Definitionsgleichung

$$(2)\quad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ 1, \gamma,\end{matrix} q, x\right) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$

$$= 1 + \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\nu)(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})} x^\nu.$$

Wo es kein Mißverständnis geben kann, lassen wir die Exponentialelemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ und den Parameter q weg und schreiben, um die Schreibweise einfacher zu gestalten, statt

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right)$$

nur $\varphi(x)$ und für

$$f_\nu\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right)$$

nur f_ν.

Die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ und q sind beliebige reelle oder komplexe Zahlen, mit der Beschränkung, daß keine der Größen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ Null, eine negative ganze Zahl, oder eine Zahl von der Form

$$\frac{2K\pi i}{\log q}$$

ist (wobei K eine beliebige ganze Zahl bedeutet). Die Potenzen von q sind immer als Hauptwerte zu verstehen. Man kann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß $|q|<1$ ist, weil durch die Formel

$$(3) \qquad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) = \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} \frac{1}{q}, q^\lambda, x\right).$$

wo

$$\lambda = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_h) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h),$$

die Reihe für $|q|>1$ auf den Fall $|q|<1$ zurückgeführt wird. Für $\lim q = 1$ und $\beta_1 = 1$ reduziert sich die Reihe auf die allgemeine hypergeometrische Reihe mit $2h-1$ Parametern. Wie man leicht sehen kann, konvergiert die Reihe für $|x|<1$ und divergiert für $|x|>1$.

Die Reihen

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \\ \gamma,\end{matrix} q, x\right) \quad \text{und} \quad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \gamma, \delta,\end{matrix} q, x\right)$$

definieren Funktionen, welche im Endlichen bis auf die Pole regulär und eindeutig sind[1]). Weil nämlich die Koeffizienten der Reihe (1) aus den Produkten der Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von Reihen der Form

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \\ \gamma,\end{matrix} q, x\right)$$

bestehen, so folgt nach einem bekannten Satze von Hadamard und Borel, daß die verallgemeinerte Reihe im Endlichen bis auf Pole regulär und eindeutig ist[2]).

2. Zusammenstellung von bekannten Formeln.

Für die Heinesche Reihe finden die folgenden bekannten Beziehungen statt, die in dieser Arbeit sehr oft gebraucht werden:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi(\beta, \alpha, \gamma, q, x), \tag{4}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) = \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\, x\, \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x), \tag{5}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi(\alpha+\beta-\gamma, 1, 1, q, x)\, \varphi(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}x), \tag{6}$$

$$\varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q)(1-q^{2})\ldots(1-q^{\nu})}\, x^{\nu} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-q^{\alpha+\nu}x}{1-q^{\nu}x}. \tag{7}$$

$$\varphi(\alpha, 0, \gamma, q, x) = 1, \tag{8}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{-\alpha-\beta+\gamma}) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\gamma-\alpha-\beta+\nu})} \quad (|q^{\gamma-\alpha-\beta}|<1). \tag{9}$$

---

[1]) Pringsheim, Sitzungsber. 40 (1910), p. 28.

[2]) Pringsheim, a. a. O., p. 28, und auch Borel, Bull. Soc. Math. de France 36 (1898), p. 247.

$$(10)\qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta-n})$$
$$= \prod_{\nu=0}^{n}(1-q^{\gamma-\alpha-\nu}) \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{\nu+\nu})(1-q^{\gamma-\alpha-\beta-n+\nu})} \varphi(\beta, -n, \gamma-\alpha-n, q, q^{\gamma-\beta}),$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist und $|q^{\gamma-\alpha-\beta-n}|<1$,

$$(11)\qquad \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$
$$= \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) + \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})} q^{\beta} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)^{1}).$$

3. Die Pole.

Die Reihe (1) und ihre analytische Fortsetzung ist im allgemeinen endlich außer für die Stellen

$$x = \frac{1}{q^{\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo sie einfache Pole besitzt. Thomae hat diese Pole für den Fall $\beta_1 = 1$ aus der Differenzengleichung hergeleitet, und weil

$$(12)\quad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) = \varphi\left(\begin{matrix}1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ 1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right),$$

so ist sein Beweis auch auf den Fall $\beta_1 \neq 1$ übertragbar. Man kann das gleiche Resultat aus den vorhergehenden Bemerkungen über die Pole, für die Fälle $h=1$, $h=2$, und dann auch mit Hilfe des obenerwähnten Satzes von Hadamard und Borel für beliebige h gewinnen.

Es folgt, daß

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^{\nu}x)\varphi(x)$$

für alle Werte von x endlich bleiben muß. Man kann also

---

[1]) Bezüglich der meisten dieser und vieler anderer wichtiger Relationen siehe die Abhandlung von Heine, Journ. für Math. 34 (1847), p. 285; Thomae, Annali di Mat. (serie II) 4 (1870), p. 115. Bezüglich $\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \gamma, \delta,\end{matrix} q, x\right)$ vgl. Pringsheim, a. a. O., p. 30.

$\varphi(x)$ als Quotienten zweier ganzer transzendenter Funktionen darstellen[1]):

$$\varphi(x) = \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu}{\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^\nu x)} \tag{13}$$

wobei

$$a_\nu = \sum_0^\infty{}^{\lambda} f_{\nu-\lambda} Q_\lambda$$

und

$$Q_0 = 1$$

$$Q_\lambda = \frac{(-1)^\lambda q^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)} \qquad (\text{für } \lambda \geqq 1).$$

Es wird später bewiesen, daß die ganze transzendente Funktion

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

sich bis auf einen Konstanten Faktor als Determinante schreiben läßt, wenn $|q^{\nu-1}| < 1$ ist.

4. Die Differenzengleichung.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der allgemeinsten Heineschen Reihe

$$\varphi\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h, \end{matrix} q, x\right)$$

liegt in der Tatsache, daß sie einer Differenzengleichung der $(h+1)^{\text{ten}}$ Ordnung in q mit einem konstanten zweiten Gliede genügt. Der Fall $\beta_1 = 1$ ist bei Thomae[2]) schon behandelt

---

[1]) Thomae, Annali di Mat. (Serie II) 4 (1870), p. 108 und Pringsheim, Sitzungsber. 40 (1910), p. 33.

[2]) Thomae, Annali di Mat. (Serie II) 4 (1870), p. 108.

und liefert eine homogene Gleichung. Es soll jetzt, nach der einfacheren Methode, welche Herr Pringsheim[1]) für die gewöhnliche Heinesche Reihe angegeben hat, die Differenzengleichung für die etwas allgemeinere Funktion

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right),$$

welche für $\beta_1 = 1$ in den Thomaeschen Fall übergeht, abgeleitet werden.

Es folgt sofort aus (1), daß

$$(14) \qquad (1-x)\varphi(x) = 1 + \sum_0^\infty{}^{\nu} (f_\nu - f_{\nu-1}) x^\nu$$

und man hat

$$f_\nu - f_{\nu-1}$$

$$= f_{\nu-1} \frac{(1-q^{\alpha_1+\nu-1})(1-q^{\alpha_2+\nu-1})\ldots(1-q^{\alpha_h+\nu-1}) - (1-q^{\beta_1+\nu-1})\ldots(1-q^{\beta_h+\nu-1})}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\ldots(1-q^{\beta_h+\nu-1})}$$

$$(15) \qquad = f_{\nu-1} q^{\nu-1} \left\{ \frac{-A_1 + A_2 q^{\nu-1} - \cdots + (-1)^h A_h q^{(h-1)(\nu-1)}}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\ldots(1-q^{\beta_h+\nu-1})} \right.$$

$$\left. - \frac{B_1 + B_2 q^{\nu-1} - \cdots + (-1)^h B_h q^{(h-1)(\nu-1)}}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\ldots(1-q^{\beta_h+\nu-1})} \right\},$$

wobei

$$A_1 = q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2} + \cdots q^{\alpha_h}$$

$$A_2 = q^{\alpha_1+\alpha_2} + q^{\alpha_1+\alpha_3} + \cdots + q^{\alpha_1+\alpha_h} + q^{\alpha_2+\alpha_3} + \cdots + q^{\alpha_{h-1}+\alpha_h}$$

— — — — — — — — — — — — —

$$A_h = q^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_h}$$

$$B_1 = q^{\beta_1} + q^{\beta_2} + \cdots + q^{\beta_h}$$

$$B_2 = q^{\beta_1+\beta_2} + q^{\beta_1+\beta_3} + \cdots + q^{\beta_1+\beta_h} + q^{\beta_2+\beta_3} + \cdots + q^{\beta_{h-1}+\beta_h}$$

— — — — — — — — — — — — —

$$B_h = q^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_h}.$$

---

[1]) Pringsheim, Sitzungsber. 41 (1911), p. 61.

Man kann daher schreiben

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{\alpha_1+\nu-1})(1-q^{\alpha_2+\nu-1})\dots(1-q^{\alpha_h+\nu-1})\\
&=1-A_1q^{\nu-1}+A_2q^{2\nu-2}-\dots+(-1)^hA_hq^{h(\nu-1)}\\
&(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\dots(1-q^{\beta_h+\nu-1})\\
&=1-B_1q^{\nu-1}+B_2q^{2\nu-2}-\dots+(-1)^hB_hq^{h(\nu-1)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Man hat identisch

$$
\begin{aligned}
&(-A_1+A_2q^{\nu-1}-\dots\\
&+(-1)^hA_hq^{(h-1)(\nu-1)})(-B_1q^{\nu-1}+B_2q^{2\nu-2}\dots(-1)^hB_hq^{h(\nu-1)})\\
&-(-B_1+B_2q^{\nu-1}-\dots\\
&+(-1)^hB_hq^{(h-1)(\nu-1)})(-A_1q^{\nu-1}+A_2q^{2\nu-2}\dots(-1)^hA_hq^{h(-1)})=0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Wenn man (17) zu dem Zähler der rechten Seite der Beziehung (15) addiert, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&f_\nu-f_{\nu-1}=q^{\nu-1}f_{\nu-1}\\
&\left\{\frac{(1-B_1q^{\nu-1}+B_2q^{2\nu-2}-\dots+(-1)^hB_hq^{h(\nu-1)})(-A_1+A_2q^{\nu-1}-\dots+(-1)^hA_hq^{(h-1)(\nu-1)})}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\dots(1-q^{\beta_h+\nu-1})}\right.\\
&\left.-\frac{(1-A_1q^{\nu-1}+A_2q^{2\nu-2}-\dots+(-1)^hA_hq^{h(\nu-1)})(-B_1+B_2q^{\nu-1}-\dots+(-1)^hB_hq^{(h-1)(\nu-1)})}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1})\dots(1-q^{\beta_h+\nu-1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Wegen (16) folgt somit

$$
\begin{aligned}
f_\nu-f_{\nu-1}&=(-A_1+A_2q^{\nu-1}-\dots+(-1)^hA_hq^{(h-1)(\nu-1)})f_{\nu-1}q^{\nu-1}\\
&-(-B_1+B_2q^{\nu-1}-\dots+(-1)^hB_hq^{(h-1)(\nu-1)})f_\nu q^{\nu-1}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Wenn dieses Resultat in (14) eingeführt wird, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&(1-x)\varphi(x)\\
&=1-A_1x\sum_1^\infty{}^\nu(xq)^{\nu-1}f_{\nu-1}+A_2x\sum_1^\infty{}^\nu(q^2x)^{\nu-1}f_{\nu-1}\dots(-1)^hA_hx\sum_1^\infty{}^\nu(q^hx)^{\nu-1}f_{\nu-1}\\
&-B_1q^{-1}\sum_1^\infty{}^\nu(xq^\nu)f_\nu+B_2q^{-2}\sum_1^\infty{}^\nu(q^2x)^{\nu-1}f_\nu\dots(-1)^hB_hq^{-1}\sum_1^\infty{}^\nu(q^hx)^\nu f_\nu
\end{aligned}
\tag{19}
$$

oder nach (1)

$$(20)\quad \begin{gathered}(1-x)\varphi(x)\\ =1-A_1x\varphi(qx)+A_2x\varphi(q^2x)-\cdots+(-1)^hA_hx\varphi(q^hx)\\ -B_1q^{-1}\varphi(qx)+B_2q^{-2}\varphi(q^2x)-\cdots+(-1)^hB_hq^{-h}\varphi(q^hx)\\ -B_1q^{-1}+B_2q^{-2}-\cdots+(-1)^hBq^{-h}.\end{gathered}$$

Endlich finden wir

$$(21)\quad \begin{gathered}(1-x)\varphi(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)\varphi(qx)+(B_2q^{-2}-A_2x)\varphi(q^2x)+\cdots\\ +(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)\varphi(q^hx)\\ =(1-q^{\beta_1-1})(1-q^{\beta_2-1})\ldots(1-q^{\beta_h-1}).\end{gathered}$$

Dies ist aber die gesuchte Gleichung.

Für eine der Größen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ gleich eins verschwindet die rechte Seite und es ergibt sich die homogene Gleichung, die Thomae betrachtet hat:

$$(22)\quad \begin{gathered}(1-x)\varphi(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)\varphi(qx)+(B_2q^{-2}-A_2x)\varphi(q^2x)\\ +\cdots(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)\varphi(q^hx)=0.\end{gathered}$$

Für die gewöhnliche Heinesche Reihe lautet die Gleichung

$$(23)\quad \begin{gathered}(1-x)\varphi(x)-(1+q^{\gamma-1}-x\cdot q^{\alpha}+q^{\beta})\varphi(qx)\\ +(q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta})\varphi(q^2x)=0.\end{gathered}$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\varphi(qx)-\varphi(x)=\Delta\varphi(x)$$
$$\Delta\varphi(qx)-\Delta\varphi(x)=\varphi(q^2x)-2\varphi(qx)+\varphi(x)=\Delta^2\varphi(x),$$

so ergibt sich durch diese Substitutionen

$$(24)\quad \begin{gathered}(q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta})\Delta^2\varphi(x)-\{1+q^{\gamma-1}-x(q^{\alpha}+q^{\beta}-2q^{\alpha+\beta})\}\\ \Delta\varphi(x)-x(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})\varphi(x)=0.\end{gathered}$$

Diese Form der Differenzengleichung wurde ursprünglich von Heine[1]) gegeben.

[1]) Heine, Journ. für Math. 34 (1847), p. 316.

Für den speziellen Fall $\beta = 1$ ist

$$(25) \qquad (1 - x)\varphi(x) - (q^{\gamma-1} - x q^{\alpha})\varphi(qx) = 1 - q^{\gamma-1}$$

und für $\beta = \gamma$ ist

$$(26) \qquad (1 - x)\varphi(x) - (1 - q^{\alpha} x)\varphi(qx) = 0.$$

5. Die K-Funktionen.

Anknüpfend an diese letzte Gleichung führen wir hier eine für später zweckmäßige Funktion ein, die wir nach Thomae als K-Funktion bezeichnen. Darunter wird eine Funktion verstanden, die ungeändert bleibt, wenn x durch qx ersetzt wird[1]). Solche Funktionen spielen bei der Lösung einer Differenzengleichung in q dieselbe Rolle wie Konstanten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Eine sehr wichtige K-Funktion ergibt sich aus den Lösungen der Gleichung (26), die schon von Jacobi[2]) für den Fall, daß α gleich einer positiven ganzen Zahl ist, behandelt wurde.

Es ergibt sich unmittelbar

$$F_1(x) = \frac{1 - q^{\alpha} x}{1 - q} F_1(qx)$$

$$F_2(x) = \frac{1 - q^{\alpha} x}{1 - q} F_2(qx),$$

wobei $F_1(x)$ und $F_2(x)$ irgend zwei Lösungen der Gleichung (26) sind. Daher ist

$$(27) \qquad \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{F_1(qx)}{F_2 q(x)}.$$

Dieser Quotient $\dfrac{F_1(x)}{F_2(x)}$ ist, wie man ohne weiteres sieht,

---

[1]) Näheres über solche Funktionen siehe Rausenberger, Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen (1884), p. 221.

[2]) Jacobi, Journ. für Math. 32 (1846), p. 201.

eine K-Funktion. Man findet nun leicht, daß die Heineschen Reihen

$$\varphi(\alpha, 1, 1, q, x) \quad \text{und} \quad x^{-\alpha}\varphi\left(\alpha, 1, 1, q, \frac{q^{1-\alpha}}{x}\right)$$

zwei Lösungen von (26) sind und hieraus folgt, daß

$$x^{\alpha}\frac{\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\alpha, 1, 1, q, \frac{q^{1-\alpha}}{x}\right)} \tag{28}$$

eine K-Funktion ist[1]).

§ 2.

Die Pole.

6. Darstellung der Reihe h^{ter} Ordnung durch eine Reihe von Reihen $(h-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die allgemeinste Heinesche Reihe von der Ordnung h läßt sich als die Summe eben solcher Heineschen Reihen von der Ordnung $h-1$ ausdrücken. Unter der Voraussetzung, daß $|q^{\alpha_1}|<1$, ergibt sich nach (17)

$$\varphi(\beta_1-\alpha_1, 1, 1, q, q^{\alpha_1}) \tag{29}$$

$$=1+\frac{1-q^{\beta_1-\alpha_1}}{1-q}q^{\alpha_1}+\frac{(1-q^{\beta_1-\alpha_1})(1-q^{\beta_1-\alpha_1+1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{2\alpha_1}+\cdots=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-q^{\beta_1+\nu}}{1-q^{\alpha_1+\nu}}.$$

Multipliziert man (1) mit dieser Reihe (29), so findet man:

$$\varphi(\beta_1-\alpha_1, 1, 1, q, q^{\alpha_1})\,\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_h,\\ \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) \tag{30}$$

$$=\varphi(\beta_1-\alpha_1, 1, 1, q, q^{\alpha_1})+\varphi(\beta_1-\alpha_1, 1, 1, q, q^{\alpha_1+1})f_1\left(\begin{matrix}\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_h\\ \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right)x$$

$$+\varphi(\beta_1-\alpha_1, 1, 1, q, q^{\alpha_1+2})f_2\left(\begin{matrix}\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_h\\ \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right)x^2+\ldots$$

---

[1]) Thomae, Journ. für Math. 70 (1869), p. 62.

$$+\varphi(\beta_1-\alpha_1,1,1,q,q^{\alpha_1+\nu})f_\nu\begin{pmatrix}\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h\\ \beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_h\end{pmatrix}x^\nu+\ldots$$

$$=\sum_0^\infty{}^\nu\varphi(\beta_1-\alpha_1,1,1,q,q^{\alpha_1+\nu})f_\nu\begin{pmatrix}\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h\\ \beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_h\end{pmatrix}x^\nu.$$

Diese Summe läßt sich nach Potenzen von q^{α_1} umordnen und man hat

$$\varphi(\beta_1-\alpha_1,1,1,q,q^{\alpha_1})\,\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_h,\\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_h,\end{pmatrix}q,x\Big)$$

(31)

$$=\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\,\varphi\begin{pmatrix}\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h,\\ \beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_h,\end{pmatrix}q,xq^\nu\Big),$$

wo

$$a_0=1$$

$$a^\nu=\prod_{\lambda=0}^{\nu-1}\frac{q^{\alpha_1}-q^{\beta_1+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}}\qquad(\nu\geq 1).$$

Da nun

$$\frac{1}{\varphi(\beta_1-\alpha_1,1,1,q,q^{\alpha_1})}=\varphi(\alpha_1-\beta_1,1,1,q,q^{\beta_1})=\prod_{\nu=0}^\infty\frac{1-q^{\alpha_1+\nu}}{1-q^{\beta_1+\nu}},$$

so folgt endlich

$$\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_h,\\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_h,\end{pmatrix}q,x\Big)$$

(32)

$$=\prod_{\nu=0}^\infty\frac{1-q^{\alpha_1+\nu}}{1-q^{\beta_1+\nu}}\cdot\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\,\varphi\begin{pmatrix}\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h,\\ \beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_h,\end{pmatrix}q,q^\nu x\Big).$$

Diese einfache Zerlegung gilt nur unter der Annahme, daß $|q^{\alpha_1}|<1$ ist, wobei wegen der Symmetrie der Reihe α_1 natürlich auch durch $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h$ ersetzt werden kann. Es braucht daher bloß eine der Größen $|q^{\alpha_1}|,|q^{\alpha_2}|,\ldots,|q^{\alpha_h}|$ kleiner als eins sein.

Es ergibt sich kein wesentlicher Unterschied für den Fall, wo keine der Größen $|q^{\alpha_1},q^{\alpha_2}|,\ldots,|q^{\alpha^h}$ kleiner als eins ist. Es läßt sich nämlich immer eine positive Zahl $\varkappa$ angeben derart, daß $|q^{\alpha_1+\varkappa}|>1$ ist, und man kann dann die Reihe folgendermaßen zerlegen:

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h,\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) = \sum_0^{\varkappa-1} {}_\nu f_\nu \left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) x^\nu$$

$$+ f_\varkappa \left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) x^\varkappa \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1 + \varkappa, \ldots, \alpha_h + \varkappa,\\ \alpha_1 + \varkappa, \ldots, \beta_h + \varkappa,\end{matrix} q, x\right),$$

wobei die Reihe sich auf die Summe eines Polynomes und einer Reihe der obigen Art reduziert.

Hiemit folgt aus (32)

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1 + \varkappa, \ldots, \alpha_h + \varkappa,\\ \beta_1 + \varkappa, \ldots, \beta_h + \varkappa,\end{matrix} q, x\right) =$$

$$\prod_{\nu=0}^{\varkappa} \frac{1 - q^{\alpha_1+\varkappa+\nu}}{1 - q^{\beta_1+\varkappa+\nu}} \sum_0^\infty {}_\nu b_\nu \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_2 + \varkappa, \ldots, \alpha_h + \varkappa,\\ \beta_2 + \varkappa, \ldots, \beta_h + \varkappa,\end{matrix} q, q^\nu x\right), \tag{33}$$

wo

$$b_0 = 1$$

$$b_\nu = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{q^{\alpha_1} - q^{\beta_1+\lambda}}{1 - q^{1+\lambda}} q^\varkappa \qquad (\nu \geq 1).$$

Endlich ist

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h,\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{matrix} q, x\right) = \sum_0^{\varkappa-1} {}_\nu f_\nu \left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) x^\nu$$

$$+ f_\varkappa \left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\end{matrix}\right) x^\varkappa \prod_{\nu=0}^{\varkappa} \frac{1 - q^{\alpha_1+\varkappa+\nu}}{1 - q^{\beta_1+\varkappa+\nu}} \tag{34}$$

$$\cdot \sum_0^\varkappa {}_\nu b_\nu \varphi\left(\begin{matrix}\alpha_2 + \varkappa, \ldots, \alpha_h + \varkappa,\\ \beta_2 + \varkappa, \ldots, \beta_h + \varkappa,\end{matrix} q, q^\nu x\right).$$

Diese Gleichung reduziert sich für $\varkappa = 0$ auf (32).

7. Partialbruch-Zerlegung.

Mit Hilfe der vorhergehenden Ergebnisse kann man die Heinesche Reihe in eine Reihe von Partialbrüchen zerlegen. Es folgt aus (13), daß die Nenner der Brüche

$$(1 - q^\nu x), \qquad (\nu = 0, 1\ 2 \ldots)$$

sein müssen. Wenn wir zuerst die gewöhnliche Heinesche Reihe für $\beta = 1$ betrachten, ergibt sich

$$\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) = \varphi\left(\begin{matrix}\alpha, 1, \\ \gamma, 1,\end{matrix} q, x\right),$$

und es folgt nach (17), daß

$$\varphi\left(\alpha, 1, \gamma, q, x\right) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu\, \varphi(1, 1, 1, q, x\Big),$$

wo a_ν dieselbe Bedeutung wie in (32) hat. Weiter folgt wegen

$$\varphi(1, 1, q, q^\nu x) = \frac{1}{1-q^\nu x}$$

die Gleichung

$$(35) \qquad \varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a_\nu}{1-q^\nu x}.$$

Da sich die allgemeinste Heinesche Reihe immer durch Reihen, deren Ordnung um eins niedriger ist, ausdrücken läßt, kann man diese einfache Zerlegung auch anwenden, um zunächst die Partialbruch-Zerlegung der Reihe mit vier Exponentialgrößen, nämlich

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \gamma, \delta,\end{matrix} q, x\right) = 1$$

$$+ \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^{\beta})\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})(1-q^{\delta})\ldots(1-q^{\delta+\nu-1})} x^\nu$$

zu finden.

Für den Fall $|q^\alpha| < 1$ und $|q^\beta| < 1$ ergibt sich aus (32), daß

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \gamma, \delta,\end{matrix} q, x\right) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-q^{\beta+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, b_\nu\, \varphi(\alpha, 1, \gamma, q, q^\nu x),$$

wo

$$b_0 = 1$$

$$b_\nu = \prod_{\lambda=1}^{\nu-1} \frac{q^\beta - q^{\delta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} \quad (\nu \geq 1).$$

Man kann jetzt die Zerlegung für $\varphi(a, 1, \gamma, q, q^\nu x)$, die durch (35) gegeben ist, einführen und bekommt[1])

$$(36) \quad \varphi\left(\begin{matrix} a, & \beta, \\ \gamma, & \delta, \end{matrix} q, x\right) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{C_\nu}{1-q^\nu x},$$

wo

$$C_0 = 1$$

$$C_\nu = a_\nu + a_{\nu-1} b_1 + a_{\nu-2} b_2 + \cdots + a_1 b_{\nu-1} + b_\nu \quad (\nu \geq 1)$$

$$= \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{q^\alpha - q^{\gamma+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} + \frac{q^\beta - q^\delta}{1-q} \prod_{\lambda=0}^{\nu-2} \frac{q^\alpha - q^{\gamma+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} + \cdots + \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{q^\beta - q^{\delta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}}$$

$$= \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{q^\alpha - q^{\gamma+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} \varphi(\delta-\beta, -\nu, \alpha-\gamma-\nu+1, q, q^{\beta-\gamma+1})$$

oder wegen der symmetrischen Eigenschaften der Reihe

$$C_\nu = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{q^\beta - q^{\delta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} \varphi(\gamma-\alpha, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1}).$$

Diese formale Zerlegung ist gültig und gleich der regulären Funktion

$$\varphi\left(\begin{matrix} a, & \beta, \\ \gamma, & \delta, \end{matrix} q, x\right),$$

wenn erstens $\lim_{\nu=\infty} q^\nu = 0$ und zweitens die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu \; C_\nu$$

konvergiert[2]).

---

[1]) Vgl. Thomae, Journ. für Math. 70 (1869), p. 275.

[1]) Borel, Leçons sur les Fonctions méromorphes, p. 69.

Der ersten Bedingung ist mit Sicherheit genügt wegen $|q|<1$. Die Konvergenz von $\sum_0^\infty{}^{\nu} |C_\nu|$ läßt sich wie folgt beweisen.

Man setzt

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} |C_\nu| = \tag{37}$$

$$1+\sum_1^\infty{}^{\nu} \left| \prod_{\lambda=0}^{\nu+1} \frac{1-q^{\delta-\beta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}} \cdot \varphi(\gamma-\alpha, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1}) \cdot q^{\nu\beta} \right|.$$

Diese Reihe schreitet nach Potenzen von q^β fort und konvergiert, wenn

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} \right| < 1$$

ist. Aus (37) ergibt sich aber

$$\left|\frac{C_\nu}{C_{\nu-1}}\right| = |q^\beta| \cdot \left|\frac{1-q^{\delta-\beta+\nu-1}}{1-q^\nu}\right| \cdot \left|\frac{\varphi(\gamma-\alpha, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1})}{\varphi(\gamma-\alpha, 1-\nu, \beta-\delta-\nu+2, q, q^{\alpha-\delta+1})}\right| \tag{38}$$

und es folgt nach Anwendung von (11), daß

$$\frac{\varphi(\gamma-\alpha, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1})}{\varphi(\gamma-\alpha, 1-\nu, \beta-\delta-\nu+2, q, q^{\alpha-\delta+1})} = \frac{\varphi(\alpha-\gamma, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1})}{N},$$

wobei

$$N = \varphi(\gamma-\alpha, -\nu, \beta-\delta-\nu+1, q, q^{\alpha-\delta+1})$$
$$+ q^{\alpha-\delta-\nu+1} \frac{(1-q^{\gamma-\delta})(1-q^{\beta-\delta+1})}{(1-q^{\beta-\delta-\nu+1})(1-q^{\beta-\delta-\nu+2})} \varphi(\gamma-\alpha+1, 1-\nu, \beta-\delta-\nu+3, q, q^{\alpha-\delta+1}).$$

In dem Nenner N dieses Bruches ist

$$\lim_{\nu=\infty} q^{\alpha-\delta-\nu+1} \frac{(1-q^{\gamma-\delta})(1-q^{\beta-\delta+1})}{(1-q^{\beta-\delta-\nu+1})(1-q^{\beta-\delta-\nu+2})} \cdot$$

$$\varphi(\gamma-\alpha+1, 1-\nu, \beta-\delta-\nu+3, q, q^{\alpha-\delta+1}) \tag{39}$$
$$= \lim_{\nu=\infty} q^\nu \frac{(1-q^{\gamma-\delta})(1-q^{\beta-\delta+1})}{(q^\nu-q^{\beta-\delta+1})(q^\nu-q^{\beta-\delta+2})} \cdot$$
$$q^{\alpha-\delta+1} \varphi(\gamma-\alpha+1, 1-\nu, \gamma-\delta-\nu+3, q, q^{\alpha-\delta+1})$$

und wegen

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\gamma-\alpha+1,\ 1-\nu,\ \beta-\delta-\nu+3,\ q,\ q^{\alpha-\delta+1})$$
$$= \varphi(\gamma-\alpha+1,\ 1,\ 1,\ q,\ q^{\alpha-\beta-1}) = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1-q^{\gamma-\beta-1+\lambda}}{1-q^{\alpha-\beta-1+\lambda}}$$

ist dieser Grenzwert außer dem Fall $\alpha-\beta-1$ eine negative ganze Zahl oder Null, endlich, und daher ist der Limes (39) gleich Null. Schließlich ist

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} \right| = |q^\beta|.$$

Es ergibt sich daher, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu|$$

für $|q^\beta|<1$ konvergiert. Da diese Bedingung auf Grund der Voraussetzung erfüllt ist, so ist die Gültigkeit der Partialbruch-Zerlegung (36) bewiesen.

Die hiebei eingeführte Beschränkung $|q^\alpha<1$ und $|q^\beta|<1$ läßt sich in folgender Weise wegschaffen. Man wählt wie früher eine positive Zahl $\varkappa$ derart, daß die beiden Größen $|q^{\alpha+\varkappa}|$ und $|q^{\beta+\varkappa}|$ kleiner als eins sind. Es ergibt sich somit, daß

(40)
$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta,\\ \gamma,\ \delta,\end{matrix}\ q,\ x\right)$$
$$= P_\varkappa(x) + x^\varkappa \prod_{\nu=0}^{\varkappa-1} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \varphi\left(\begin{matrix}\alpha+\varkappa,\ \beta+\varkappa,\\ \gamma+\varkappa,\ \delta+\varkappa,\end{matrix}\ q,\ x\right),$$

wo

$$P_\varkappa(x) = 1$$
$$+\sum_1^{\varkappa-1}{}^\nu \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})(1-q^\delta)(1-q^{\delta+1})\ldots(1-q^{\delta+\nu-1})} x^\nu.$$

Es folgt unmittelbar aus (36), daß

$$(41)\qquad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha+\varkappa,\ \beta+\varkappa,\\ \gamma+\varkappa,\ \delta+\varkappa,\end{matrix} q,\ x\right)$$
$$= \prod_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\varkappa+\nu})(1-q^{\beta+\varkappa+\nu})}{(1-q^{\gamma+\varkappa+\nu})(1-q^{\delta+\varkappa+\nu})} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{d_\nu}{1-q^\nu x},$$

wo

$$d_0 = 1$$
$$d_\nu = q^{\nu(\beta+\varkappa)} \prod_{\nu=0}^{\nu-1} \frac{1-q^{\delta-\beta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}}\, \varphi(\gamma-\alpha,\ -\nu,\ \beta-\nu-\delta$$
$$+1,\ q,\ q^{\alpha-\delta+1}) \quad (\nu \geq 1)$$

oder das entsprechende Resultat, wenn α mit β und γ mit δ vertauscht wird. Endlich ist

$$(42)\qquad \varphi\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta,\\ \gamma,\ \delta,\end{matrix} q,\ x\right)$$
$$= P_\varkappa(x) + x^\varkappa \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{d_\nu}{1-q^\nu x}.$$

Es folgt somit aus den vorherigen Betrachtungen, daß die Zerlegung (42) gültig ist.

Diese Methode läßt sich auf die verallgemeinerte Heinesche Reihe übertragen. Die Partialbruch-Zerlegung für

$$\varphi\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\end{matrix} q,\ x\right)$$

läßt sich aus (34) und (42) entnehmen und durch die Wiederholung dieser Methode kommt man zu Reihen mit beliebig vielen Exponentialparametern, jedoch werden die Formeln außerordentlich kompliziert, so daß wir von deren Entwicklung absehen. Andererseits gilt ohne weiteres die Betrachtung auch für die Heinesche Reihe. Man hat nur in den vorhergehenden Formeln $\delta = 1$ zu setzen.

Man sieht aus (42), daß gewisse von den Polen eventuell fehlen können. Dies findet statt, wenn die Größen α, β, γ, δ so beschaffen sind, daß die Heineschen Polynome

$$\varphi(\gamma-\alpha,\ -\nu,\ \beta-\delta-\nu+1,\ q,\ q^{\alpha-\delta+1})$$

für besondere Werte von ν verschwinden.

Wenn entweder α oder β gleich Null oder einer ganzen negativen Zahl ist, läßt sich die Funktion auf $P_\varkappa(x)$ reduzieren, sonst muß der Pol $x=1$ immer vorhanden sein.

Der Pol $x=\frac{1}{q}$ fehlt für

$$\varphi(\gamma-\alpha,\ -1,\ \beta-\delta,\ q,\ q^{\alpha-\delta+1})=1+\frac{(1-q^{\gamma-\alpha}(1-q^{-1})}{(1-q)(1-q^{\beta-\delta})}q^{\alpha-\delta+1}$$

oder, was hieraus folgt[1]), für

$$q^\alpha+q^\beta=q^\gamma+q^\delta,$$

der Pole $x=\frac{1}{q^2}$ für

$$\varphi(\gamma-\alpha,\ -2,\ \alpha-\delta-1,\ q,\ q^{\alpha-\delta+1})=0$$

und so weiter.

8. Verhalten der Funktion an den singulären Stellen.

Da die Heinesche Reihe und ihre Verallgemeinerung die Stellen $\frac{1}{q^\lambda}$ $(\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ zu einfachen Polen hat, so folgt, daß an der Stelle $x=\frac{1}{q^\nu}$ das Produkt

$$\varphi(x)\prod_{\lambda=0}^{\nu}(1-q^\lambda x,$$

endlich sein muß (eventuell gleich Null in dem speziellen Falle, daß $\frac{1}{q^\nu}$ kein Pol ist). Es soll jetzt der Wert des obigen Produkts für einen beliebigen Pol $\frac{1}{q^\nu}$ bestimmt werden, wobei wir uns jedoch auf den Fall der Reihe

[1]) Pringsheim, Sitzungsber. 40 (1910), p. 31.

$$\varphi\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, \\ \gamma, & \delta, \end{pmatrix} q, \; x\Big)$$

beschränken. Die Rechnung kann dann offenbar auf die allgemeine Reihe ausgedehnt werden.

Wir haben wegen Gleichung (36), daß wenn $|q^\alpha|<1$ und $|q^\beta|<1$ sind, folgendes:

$$\lim_{x=1}\varphi(x)=\lim_{x=1}(1-x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{C_\nu}{1-q^\nu x}$$

und weil

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{C_\nu}{1-q^\nu x}\qquad\text{für}\qquad x=1$$

endlich ist, so folgt

$$\lim_{x=1}(1-x)\,\varphi(x)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}. \tag{43}$$

Für einen beliebigen Pol $\frac{1}{q^\nu}$ hat man

$$\lim_{x=\frac{1}{q^\nu}}\prod_{\lambda=0}^{\nu}(1-q^\lambda x)\,\varphi(x)$$

$$=\lim_{x=\frac{1}{q^\nu}}C_\nu\cdot\prod_{\lambda=0}^{\nu-1}(1-q^\lambda x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+1})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \tag{44}$$

$$=C_\nu\prod_{\lambda=0}^{\nu-1}(1-q^{\lambda-\nu})\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}$$

und analoge Ausdrücke, wenn man α mit β und γ mit δ vertauscht, wobei die linke Seite ungeändert bleibt.

Aus (42) ergibt sich sogleich, daß man dieselben Werte bekommt für den Fall, daß die beiden Größen $|q^\alpha|$ und $|q^\beta|$ nicht kleiner als eins sind.

9. Asymptotische Darstellung.

Im Unendlichen hat die Heinesche Reihe und deren Verallgemeinerung eine wesentlich singuläre Stelle. Um das Verhalten der Funktion an dieser Stelle zu untersuchen, hat man unter der Voraussetzung $|q^\alpha|<1$ aus (32)

$$(45)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=\prod_{\nu+0}^{\infty}\frac{1-q^{\beta+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_\nu\, a'_\nu q^{\beta\nu}\varphi(\alpha,1,1,q,q^\nu x),$$

wobei hier

$$a'_0=1$$

$$a'_\nu=\prod_{\lambda=0}^{\nu-1}\frac{1-q^{\gamma-\beta+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}}.$$

Unter Berücksichtigung der Relation (28) ergibt sich aus (45)

$$(46)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$$
$$=k(\alpha,x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\beta+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_\nu\, a'_\nu q^{\beta\nu}(q^\nu x)^{-\alpha}\varphi\left(\alpha,1,1,q,\frac{q^{1-\alpha}}{xq^\nu}\right),$$

wo:

$$k(\alpha,x)=x^{-\alpha}\frac{\varphi\left(\alpha,1,1,q,\frac{q^{1-\alpha}}{x}\right)}{\varphi(\alpha,1,1,q,x)}$$

eine K-Funktion ist. Weiter ist

$$x^\alpha\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$$
$$=k(\alpha,x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\beta+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_\nu\, a'_\nu q^{(\beta-\alpha)\nu}\varphi\left(\alpha,1,1,q\,\frac{q^{1-\alpha}}{xq^\nu}\right).$$

Ersetzt man x durch $\frac{x}{q^n}$ und läßt n ins Unendliche wachsen, so ergibt sich, da

$$\lim_{n=\infty}\varphi\left(\alpha,1,1,q,\frac{q^{1-\alpha+n}}{q^\nu x}\right)=1,$$

das Resultat

$$(47)\quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{q^n}\right)^{\alpha}\varphi\left(\alpha,\beta,\gamma,q,\frac{x}{q^n}\right)=k(\alpha,x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\beta+\nu}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,a'_\nu\,q^{(\beta-\alpha)\nu}.$$

Wegen (7) hat man

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,a'_\nu q^{(\beta-\alpha)\nu}=1+\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma-\beta+1})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+\nu-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{\nu})}q^{(\beta-\alpha)\nu}$$

$$=\varphi(\gamma-\beta,\,1,\,1,\,q,\,q^{\beta-\alpha})$$

$$=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\gamma-\alpha+\nu}}{1-q^{\beta+\alpha+\nu}}$$

und daher ist nach (47)

$$(48)\quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{q^n}\right)^{\alpha}\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=k(\alpha,x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\beta+\nu})(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\beta-\alpha+\nu})}.$$

Ein entsprechendes Resultat erhält man, wenn α und β vertauscht werden.

Man kann das vorhergehende Resultat auf die allgemeine Heinesche Reihe

$$\varphi\begin{pmatrix}\alpha,\,\beta,\,\varepsilon,\\1,\,\gamma,\,\delta,\end{pmatrix}q,\,x\Big)$$

anwenden, um die asymptotische Darstellung dieser Reihe abzuleiten. Nach (32) ergibt sich

$$(49)\quad \varphi\begin{pmatrix}\alpha,\,\beta,\,\varepsilon,\\1,\,\gamma,\,\delta,\end{pmatrix}q,\,x\Big)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\varepsilon+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,b'_\nu q^{\nu\varepsilon}\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\nu}x),$$

wobei

$$b'_0=1$$

$$b'_\nu=\prod_{\lambda=0}^{\nu}\frac{1-q^{\delta-\varepsilon+\lambda}}{1-q^{1+\lambda}}.$$

Wenn man diese Gleichung mit x^{α} multipliziert und x durch $\frac{x}{q^n}$ ersetzt, so folgt durch Einführung von (48)

$$(50)\qquad \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{q^n}\right)^{\alpha}\varphi\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta,\ \varepsilon,\\ 1,\ \gamma,\ \delta,\end{pmatrix}q,\ x\Bigg)$$

$$=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\varepsilon+\nu})\,(1-q^{\beta+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})}{(1-q^{\delta+\nu})\,(1-q^{\gamma+\nu})\,(1-q^{\beta-\alpha+\nu})}\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,b_\nu\,q^{(\varepsilon-\alpha)\nu}\cdot k(\alpha,\ x)$$

$$=k(\alpha,\ x)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\varepsilon+\nu})\,(1-q^{\beta+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})\,(1-q^{\delta-\alpha+\nu})}{(1-q^{\delta+\nu})\,(1-q^{\gamma+\nu})\,(1-q^{\beta-\alpha+\nu})\,(1-q^{\varepsilon-\alpha+\nu})}.$$

Entsprechende Resultate ergeben sich, wenn man α mit β oder ε vertauscht. Setzt man $\varepsilon=1$, so erhält man ohne weiteres die asymptotische Darstellung für $\varphi\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta,\\ \gamma,\ \delta,\end{pmatrix}q,\ x\Bigg)$.

Durch Fortsetzung der vorhergehenden Schlußweise erhält man die asymptotische Darstellung der Reihen von beliebig höherer Ordnung. Das Resultat für eine Reihe von der Ordnung n läßt sich aus den Resultaten für die Reihe von der Ordnung $n-1$ ableiten.

Wie später gezeigt werden soll, kann durch Anwendung von (48) auf die Lösungen der Heineschen Differenzengleichung (23), die von Watson[1]) auf anderem Wege gefundene analytische Fortsetzung der durch $\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x)$ definierten Funktion über den Einheitskreis hinaus hergestellt werden. Die betreffende Methode gilt sogar auch für die Reihen von beliebig höherer Ordnung.

§ 3.

Die Nullstellen der Heineschen Reihe.

10. Allgemeine Bemerkungen.

Aus Formel (11) folgt die bekannte Heinesche Kettenbruch-Entwicklung[2])

$$(51)\qquad \frac{\varphi(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ q,\ x)}{\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x)}=\frac{a_1|}{|1}+\frac{a_2x|}{|1}+\cdots+\frac{a_\mu x|}{|1}+\cdots,$$

[1]) Vgl. Watson, Trans. Camb. Phil. Soc. 21 (1910), p. 28.

[2]) Heine, Journ. für Math. 32 (1846), p. 212.

wobei

$$a_1 = 1$$

$$a_{2\mu} = -\,q^{\beta+\mu-1}\,\frac{(1-q^{\alpha+\mu-1})\,(1-q^{\gamma-\beta+\mu-1})}{(1-q^{\gamma+2\mu-2})\,(1-q^{\gamma+2\mu-1})} \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$a_{2\mu+1} = -\,q^{\alpha+\mu-1}\,\frac{(1-q^{\beta+\mu})\,(1-q^{\gamma-\beta+\mu-1})}{(1-q^{\gamma+2\mu-1})\,(1-q^{\gamma+2\mu})}$$

Es läßt sich beweisen[1]), daß wegen $\lim_{\mu=\infty} a_\mu = 0$ dieser Kettenbruch eine in jedem beliebig großen endlichen Bereich — von einer endlichen Anzahl von Polen abgesehen — reguläre eindeutige Funktion definiert, die im übrigen die wesentlich singuläre Stelle $x = \infty$ besitzt. Ausgenommen ist nur der Fall, wo $\alpha - \gamma$ oder $\beta - \gamma$ eine ganze positive Zahl oder Null ist, in welchen Fällen der Kettenbruch ein endlicher ist.

Es folgt nach (13), daß der Quotient (51) sich folgendermaßen schreiben läßt

$$(52) \qquad \frac{\varphi(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ q,\ x)}{\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x)} = \frac{\dfrac{\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu}{\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^\nu x)}}{\dfrac{\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu}{\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^\nu x)}} = \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu},$$

wo

$$a_0 = 1$$

$$a_\nu = \sum_0^\nu{}^{\lambda} f_{\nu-\lambda}(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)\, Q_\lambda \quad (\nu > 1)$$

$$b_0 = 1$$

$$b_\nu = \sum_0^\nu{}^{\lambda} f_{\nu-\lambda}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\, Q_\lambda \quad (\nu \geq 1)$$

---

[1]) Pringsheim, Sitzungsber. 40 (1910), p. 27 und auch Van Vleck, Annals of Math. 3, No. 1 (1901), p. 17.

und

$$Q_\lambda = \frac{(-1)^\lambda q^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\lambda}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)}.$$

Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu x^\nu$$

sind ganze transzendente Funktionen. Hieraus folgt, daß die Pole des Kettenbruches (51) die Nullstellen der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu x^\nu$ sind und zwar muß die Anzahl dieser Nullstellen in jedem noch so großen endlichen Bereich immer endlich sein. Die Nullstellen der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu x^\nu$ bzw., was im wesentlichen dasselbe besagt, der Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ fallen zusammen mit den Polen des obigen Kettenbruches.

Es können unter den Stellen

$$x = \frac{1}{q^\nu} (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

solche vorhanden sein, welche infolge besonderer Beschaffenheit der Zahlen α, β, γ nicht Pole der Funktion $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ sind, während andererseits $\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)$ an diesen Stellen unendlich wird. Ein solche Stelle ist eine außerwesentliche Singularität des Heineschen Kettenbruches, aber keine Nullstelle von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$. Abgesehen von diesem Fall sind alle Pole des Kettenbruches auch Nullstellen der Heineschen Reihe $(\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$.

Es soll jetzt ein Bereich um $x = 0$ definiert werden, in welchem $\varphi(x)$ keine Nullstellen besitzen kann. Setzt man

$$\varphi(x) = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu\, g_1 g_2 \ldots g_\nu x^\nu, \tag{53}$$

wo

$$g_\nu = \frac{(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q^\nu)(1-q^{\gamma+\nu-1})},$$

so ergibt sich unter Anwendung eines bekannten Determinantensatzes[1])

$$(54)\quad \frac{1}{\varphi(x)} = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots + (-1)^\nu A_\nu x^\nu + \cdots,$$

wo

$$A_\nu = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ g_1 g_2 & g_1 & 1 & \ldots & 0 \\ g_1 g_2 g_3 & g_1 g_2 & g_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1 g_2 \ldots g_\nu & g_1 g_2 \ldots g_{\nu-1} & g_1 g_2 \ldots g_{\nu-2} & \ldots & g_1 \end{vmatrix}$$
$$= g_1 A_{\nu-1} - g_1 g_2 A_{\nu-2} + \cdots + (-1)^{\nu-1} g_1 g_2 \ldots g_\nu.$$

Die Berechnung dieser Determinante A_ν liefert einen homogenen Ausdruck der ν^{ten} Ordnung in den Größen $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ mit im ganzen $2^{\nu-1}$ Gliedern. Wenn man die obere Grenze der absoluten Werte aller der Größen $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ mit G bezeichnet, folgt sofort

$$|A_\nu| \leq 2^{\nu-1} G^\nu.$$

Bildet man sodann die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}^\nu 2^{\nu-1} G^\nu x^\nu,$$

so konvergiert dieselbe in dem Kreis $|x| = \frac{1}{2G}$. Es folgt dann unmittelbar, daß die Reihe (54) mindestens in demselben Kreis $|x| = \frac{1}{2G}$ konvergiert oder was dasselbe bedeutet, die Reihe $\varphi(x)$ keine Nullstellen für $|x| < \frac{1}{2G}$ besitzen kann.

Ganz ebenso ergibt sich, daß die verallgemeinerte Heinesche Reihe (1) keine Nullstellen in dem Kreis $|x| = \frac{1}{2H}$ besitzt, wobei H das Maximum von

$$\left| \frac{(1-q^{\alpha_1+\nu-1})(1-q^{\alpha_2+\nu-1}) \ldots (1-q^{\alpha_h+\nu-1})}{(1-q^{\beta_1+\nu-1})(1-q^{\beta_2+\nu-1}) \ldots (1-q^{\beta_h+\nu-1})} \right| \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist.

---

[1]) Pascal, Die Determinanten (deutsch von Leitsmann) (1910), p. 146.

11. Nullstellen für besondere Werte von α, β, γ.

Für besondere Werte der Parameter α, β, γ ist es leicht die Lage der Nullstellen zu finden. Wir behandeln hier zuerst den Fall $\beta = \gamma$, in welchem $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ sich auf $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ reduziert.

Nach (7) besteht alsdann die Beziehung

$$\varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = \prod_0^\infty{}_\nu \frac{1 - q^{\alpha+\nu} x}{1 - q^\nu x},$$

welche unmittelbar zeigt, daß $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ die Nullstellen

$$\frac{1}{q^\alpha}, \frac{1}{q^{\alpha+1}}, \ldots, \frac{1}{q^{\alpha+\nu}}, \ldots$$

besitzt, außer wenn α eine ganze Zahl oder Null ist. In diesem Falle reduziert sich nämlich $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ auf ein endliches Produkt (bzw. auf die Einheit, wenn $\alpha = 1$).

Als zweiten Fall behandeln wir die Annahme, daß die Reihe die Form $\varphi(\alpha + 1, \beta, \alpha, q, x)$ annimmt. Aus Formel (6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha+1, \beta, \alpha, q, x) &= \varphi(\beta+1, 1, 1, q, x)\, \varphi(-1, \alpha-\beta, \alpha, q, q^{\beta+1} x) \\ &= \prod_{\nu=0}^\infty \frac{1-q^{\beta+\nu+1}}{1-q^\nu x} x \cdot \left(1 + \frac{(1-q^{-1})(1-q^{\alpha-\beta})}{(1-q)(1-q^\alpha)} q^{\beta+1} x\right) \\ &= \prod_{\nu=0}^\infty \frac{1-q^{\beta+\nu+1}}{1-q^\nu x} x \left(1 - \frac{(q^\beta - q^\alpha)}{(1-q^\alpha)} x\right). \end{aligned} \tag{55}$$

Es folgt ohne weiteres, daß die Nullstellen in der Form

$$x = \frac{1-q^\alpha}{q^\beta - q^\alpha}, \quad \frac{1}{q^{\beta+1}}, \quad \frac{1}{q^{\beta+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{q^{\beta+\nu}}, \quad \ldots$$

enthalten sind. Diese Methode kann auf den Fall $\gamma = \alpha - n$, wo n eine positive ganze Zahl ist, übertragen werden. Die resultierende Funktion ist dann

$$\varphi(\alpha + n, \beta, \alpha, q, x)$$

und man findet

$$\varphi(\alpha+n, \beta, \alpha, q, x) = \varphi(\beta+n, 1, 1, q, x)\,\varphi(-n, \alpha-\beta, \alpha, q, q^{\beta+n}x)$$
$$= P_n(x)\prod_{\nu+0}^{\infty}\frac{1-q^{\beta+\nu-\nu}x}{1-q^{\nu}x},$$

wo $P_n(x)$ das Heinesche Polynome $\varphi(-n,\ \alpha-\beta,\ \alpha,\ q,\ q^{\beta+n}x)$ bedeutet. Die Nullstellen $x = \frac{1}{q^{\alpha+n}}, \frac{1}{q^{\alpha+n+1}}, \ldots$, sind außerdem die n-Wurzeln des Polynomes $P_n(x)$.

§ 4.

Die Heineschen Differenzgleichungen und deren Verallgemeinerungen.

12. Allgemeine Form der Fundamentallösungen für die homogene Gleichung.

Die nichthomogene Differenzengleichung für die allgemeinste Heinesche Reihe ist in der Einleitung (s. Gl. (19)) schon abgeleitet. Wenn man in (19) für $\varphi(x)$ eine unbekannte Funktion $U(x)$ setzt, folgt

$$\begin{aligned}(56)\quad &(1-x)U(x)-B_1q^{-1}-A_1x)U(qx)+(B_2q^{-2}-A_2x)U(q^2x)-\ldots\\ &+(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)U(q^hx)=(1-q^{\beta_1-1})(1-q^{\beta_2-1})\ldots(1-q^{\beta_h-1}).\end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung dieser Gleichung ist

$$U(x) = \varphi\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h,\\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h,\end{pmatrix} q, x\Big).$$

Es bleibt nun noch die Frage, ob diese Gleichung durch Heinesche Funktionen mit anderen Parametern oder durch irgendwelche andere Funktionen befriedigt werden kann, und wie die vollständige Lösung lautet.

Um diese Frage zu beantworten, soll zuerst die entsprechende homogene Gleichung

$$\begin{aligned}&(1-x)\,U(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)\,U(qx)+(B_2q^{-2}-A_2x)\,U(q^2x)-\cdots\\ (57)\qquad &+(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)\,U(q^hx)=0,\end{aligned}$$

die entsteht, wenn die rechte Seite von (56) durch Null ersetzt wird, behandelt werden.

Es sei angenommen, daß $U_1(x)$, $U_2(x)$, . . ., $U_h(x)$ irgend h-Funktionen sind, welche dieser Gleichung genügen. Es folgt somit, daß die Produkte dieser Funktionen mit beliebigen K-Funktionen (siehe 5) auch Lösungen der Gleichung sind. Man hat sodann

$$
\begin{aligned}
&(1-x)U_1(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)U_1(qx)+\cdots+(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)U_1(q^hx)=0\\
&(1-x)U_2(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)U_2(qx)+\cdots+(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)U_2(q^hx)=0\\
(58)\quad &— \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad —\\
&(1-x)U_h(x)-(B_1q^{-1}-A_1x)U_h(qx)+\cdots+(-1)^h(B_hq^{-h}-A_hx)U_h(q^hx)=0.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich hieraus

$$
(59)\qquad (1-x):(B_1q^{-1}-A_1x):\ldots:(B_hq^{-h}-A_hx)
$$
$$
=[U_1(qx), U_2(q^2x), \ldots, U_h(q^hx)]:[U_1(x), U_2(q^2x), \ldots, U_h(q^hx)]:
$$
$$
\ldots:[U_1(x),\ U_2(q, x),\ \ldots,\ U_h(q^{h-1}x)],
$$

wobei

$$
[U_1(qx), U_2(q^2x), \ldots, U_h(q^hx)] = \begin{vmatrix} U_1(qx) & U_1(q^2x) & \ldots & U_1(q^hx) \\ U_2(qx) & U_2(q^2x) & \ldots & U_2(q^hx) \\ — & — & — & — \\ U_h(qx) & U_h(q^2x) & \ldots & U_h(q^hx) \end{vmatrix}
$$

und die anderen Symbole analoge Werte besitzen.

Weil $B_hq^{-h}-A_hx$ nicht identisch verschwinden kann, muß es folglich mindestens ein System von Lösungen $U_1(x)$, $U_2(x)$, . . ., $U_h(x)$ geben, für welches

$$
(60)\qquad [U_1(x),\ \ U_2(qx),\ \ \ldots,\ \ U_h(q^{h-1}x)] \neq 0.
$$

Ein solches Funktionssystem soll ein Fundamentalsystem von Lösungen (Integralen) genannt werden. Weil die Determinante (60) nur dann identisch verschwinden kann, wenn zwei von den Lösungen sich durch eine K-Funktion als Faktor unterscheiden, so folgt, daß ein Fundamentalsystem von Lösungen dadurch charakterisiert wird, daß der Quotient zweier Lösungen keine K-Funktion ist.

Es ergibt sich weiter aus (59), daß die zugehörige homogene Differenzengleichung bestimmt werden kann, wenn ein Fundamentalsystem gegeben ist. Schreibt man die Gleichung nämlich in der Form

$$U(x) - p_1 U(qx) + p_2 U(q^2 x) - \cdots (-1)^h p_h U(q^h x) = 0,$$

so bestehen für alle Werte von x die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&U_1(x) - p_1 U_1(qx) + p_2 U_1(q^2 x) - \cdots + (-1)^h p_h U_1(q^h x) = 0\\
&U_2(x) - q_1 U_2(qx) + p_2 U_2(q^2 x) - \cdots + (-1)^h p_h U_2(q^h x) = 0\\
&\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&U_h(x) - p_1 U_h(qx) + p_2 U_h(q^2 x) - \cdots + (-1)^h p_h U_h(q^h x) = 0
\end{aligned}$$

und diese bestimmen, weil ihre Determinante

$$[U_1(qx),\ U_2(q^2 x),\ \ldots,\ U_h(q^h x)] \neq 0,$$

die Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_h$.

Um die allgemeine Lösung zu finden, müssen wir voraussetzen, daß $U(x)$ eine Lösung der Gleichung (57) sei, die sich von allen partikulären Lösungen in dem Fundamentalsystem durch mehr als eine K-Funktion als Faktor unterscheidet. Es wird jetzt bewiesen, daß eine solche Lösung eine lineare Funktion der Lösungen des Fundamentalsystems mit K-Funktionen als Koeffizienten ist.

Es ergibt sich aus (59), daß

$$\begin{aligned}
&(1-x)\,[U_1(x),\ U_2(qx),\ \ldots,\ U_h(q^{h-1}x)]\\
&= (B_h q^{-h} - A_h x)\,[U_1(qx),\ U_2(q^2 x),\ \ldots,\ U_h(q^h x)].
\end{aligned} \tag{61}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$D(x) = [U_1(x),\ U_2(qx),\ \ldots,\ U_h(q^{h-1}x)],$$

so folgt aus (61)

$$\begin{aligned}
(1-x)\,D(x) &= (B_h q^{-h} - A_h x)\,D(qx)\\
&= (q^{\mu-h} - q^{\lambda} x)\,D(qx),
\end{aligned} \tag{62}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mu &= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h\\
\lambda &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_h.
\end{aligned}$$

Substituiert man ferner

$$D(x) = x^{h-\mu}\varphi(\mu - \lambda + h, 1, 1, q, x)E(x),$$

so ergibt sich aus (55):

$$E(x) = E(qx).$$

Hieraus folgt, daß $E(x)$ eine K-Funktion ist, und man findet schließlich

$$D(x) = K(x)x^{h-\mu}\varphi(\mu - \lambda + h, 1, 1, q, x), \tag{63}$$

wo $K(x)$ eine beliebige K-Funktion bedeutet.

Sind $D_1(x), D_2(x), \ldots, D_h(x)$ die Determinanten, die aus $D(x)$ entstehen, wenn $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_h(x)$ nacheinander durch $U(x)$ ersetzt werden, so folgt unmittelbar aus (61) und (63)

$$\begin{aligned} D_1(x) &= K_1(x)x^{h-\mu}\varphi(\mu - \lambda + h, 1, 1, q, x) \\ D_2(x) &= K_2(x)x^{h-\mu}\varphi(\mu - \lambda + h, 1, 1, q, x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_h(x) &= K_h(x)x^{h-\mu}\varphi(\mu - \lambda + h, 1, 1, q, x), \end{aligned}$$

wo $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_h(x)$ beliebige K-Funktionen sind. Es folgt somit aus diesen Gleichungen, daß $U(x)$ sich durch eine lineare Funktion aus den partikulären Lösungen $U_1(x)$, $U_2(x), \ldots, U_h(x)$ des Fundamentalsystems mit K-Funktionen als Koeffizienten, ausdrücken läßt, d. h.

$$\begin{aligned} U(x) = {} & K_1'(x)\,U_1(x) + K_2'(x)\,U_2(x) + \cdots \\ & + K_h'(x)\,U_h(x) \end{aligned} \tag{64}$$

ist die allgemeinste Lösung der Gleichung (57), ein Resultat, welches mit dem ohne Beweis bei Thomae angegebenen übereinstimmt.

13. Die vollständige Integration der homogenen Differenzengleichung.

Wir wollen jetzt im Anschluß an Thomae[1]) zunächst zeigen, wie die homogene Gleichung (57) durch eine Reihe von der Form

[1]) Thomae, Annali di Mat. (serie II) 4 (1869), p. 112.

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^{\nu-\mu},$$

wo μ unbestimmt sein mag, befriedigt werden kann. Setzt man diese Reihe in (57), so ergibt sich

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \{1 - B_1 q^{\nu+\mu-1} + B_2 q^{2(\nu+\mu-1)} - \cdots + (-1)^h B_h q^{h(\nu+\mu-1)}\} x^{\nu+\mu}$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \{1 - A_1 q^{\nu+\mu} + A_2 q^{2(\nu+\mu)} - \cdots + (-1)^h A_h q^{h(\nu+\mu-1)}\} x^{\nu+\mu+1} = 0.$$

Man kann voraussetzen, daß $a_0 \neq 0$, da sich sonst für das Anfangsglied der Reihe nicht der Exponent μ, sondern ein höherer Exponent ergeben würde. Zur Bestimmung des μ erhält man dann die Gleichung:

$$1 - B_1 q^{\mu-1} + B_2 q^{2(\mu-1)} - \cdots + (-1)^h B_h q^{h(\mu-1)} = 0.$$

Hieraus ergeben sich für μ die Lösungen [1])

$$\mu = 1 - \beta_1,\ 1 - \beta_2,\ \ldots,\ 1 - \beta_h.$$

Für die Koeffizienten erhält man die folgenden Rekursionsformeln:

$$A_{\nu+1} = A_\nu \frac{(1 - q^{\alpha_1+\nu+\mu})(1 - q^{\alpha_2+\nu+\mu}) \ldots (1 - q^{\alpha_h+\nu+\mu})}{(1 - q^{\beta_1+\nu+\mu})(1 - q^{\beta_2+\nu+\mu}) \ldots (1 - q^{\beta_h+\nu+\mu})}.$$

Man findet, wenn $A_0 = 1$ ist, die Lösungen

(65)
$$U_1(x) = x^{1-\beta_1} \varphi \begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_1+1, & \alpha_2-\beta_1+1, & \ldots, & \alpha_h-\beta_1+1, \\ 1 & , \beta_2-\beta_1+1, & \ldots, & \beta_h-\beta_1+1, \end{pmatrix} q, x$$

$$U_2(x) = x^{1-\beta_2} \varphi \begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_2+1, & \alpha_2-\beta_2+1, & \ldots, & \alpha_h-\beta_2+1, \\ \beta_1-\beta_2+1, & 1 & , \ldots, & \beta_h-\beta_2+1, \end{pmatrix} q, x$$

— — — — — — — — — — — —

$$U_h(x) = x^{1-\beta_h} \varphi \begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_h+1, & \alpha_2-\beta_h+1, & \ldots, & \alpha_h-\beta_h+1, \\ \beta_1-\beta_h+1, & \beta_2-\beta_h+1, & \ldots, & 1 & , \end{pmatrix} q, x.$$

[1]) Vgl. Thomae, Annali di Mat. (serie II) 4 (1870), p. 137 und Jackson, Americ. Journ. of Math. 32 (1910), p. 311.

Hieraus folgt unmittelbar, daß wenn die Exponentialgrößen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ alle untereinander verschieden sind, der Quotient von irgend zweien der Funktionen (65) niemals eine K-Funktion liefert. Daher genügen diese Funktionen der Ungleichung (60) und bilden also ein Fundamentalsystem.

Ist $\beta_i - \beta_j$, wo $i \neq j$ ist, Null oder eine ganze Zahl, so werden gewisse der Lösungen (65) keinen Sinn haben. Diese Ausnahmefälle sollen später behandelt werden.

Versucht man nun die Gleichung (57) durch eine Reihe nach negativen Potenzen

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} b_\nu \frac{1}{x^{\nu+\mu}}$$

zu befriedigen, so erhält man folgende Lösungen:

$$V_1(x) = x^{-\alpha_1} \varphi \left(\begin{matrix} \alpha_1-\beta_1+1, & \alpha_1-\beta_2+1, & \ldots, & \alpha_1-\beta_h+1, \\ 1 & , \alpha_1-\alpha_2+1, & \ldots, & \alpha_1-\alpha_h+1, \end{matrix} q, \frac{q^\varepsilon}{x} \right)$$

$$V_2(x) = x^{-\alpha_2} \varphi \left(\begin{matrix} \alpha_2-\beta_1+1, & \alpha_2-\beta_2+1, & \ldots, & \alpha_2-\beta_h+1, \\ \alpha_2-\alpha_1+1, & 1 & , \ldots, & \alpha_2-\alpha_h+1, \end{matrix} q, \frac{q^\varepsilon}{x} \right)$$

66)

— — — — — — — — — — — — — —

$$V_h(x) = x^{-\alpha_h} \varphi \left(\begin{matrix} \alpha_h-\beta_1+1, & \alpha_h-\beta_2+1, & \ldots, & \alpha_h-\beta_h+1, \\ \alpha_h-\alpha_1+1, & \alpha_h-\alpha_2+1, & \ldots, & 1 & , \end{matrix} q, \frac{q^\varepsilon}{x} \right)$$

wobei

$$\varepsilon = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_h).$$

Diese Reihen bilden ebenfalls im allgemeinen ein Fundamentalsystem.

14. Die nichthomogene Gleichung.

Die vollständige Lösung der nichthomogenen Gleichung (56) läßt sich mit Hilfe der vorhergehenden Behandlung der homogenen Gleichung finden. Man hat schon die partikuläre Lösung

$$U(x) = \left(\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_h, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_h, \end{matrix} q, x \right).$$

Bezeichnet man jetzt die vollständige Lösung mit $U(x)$, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\begin{gathered}(1-x)\varphi(x)\\ -(B_1 q^{-1}-A_1 x)\varphi(qx)+\cdots+(-1)^h(B_h q^{-h}-A_h x)\varphi(q^h x)\\ =(1-q^{\beta_1-1})(1-q^{\beta_2-1})\ \ldots\ (1-q^{\beta_h-1})\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(1-x)U(x)\\ -(B_1 q^{-1}-A_1 x)U(qx)+\cdots+(-1)^h(B_h q^{-h}-A_h x)U(q^h x)\\ =(1-q^{\beta_1-1})(1-q^{\beta_2-1})\ \ldots\ (1-q^{\beta_h-1}).\end{gathered}$$

Es folgt hieraus

$$\begin{gathered}(1-x)\Omega(x)-(B_1 q^{-1}-A_1 x)\Omega(qx)+\cdots\\ +(-1)^h(B_h q^{-h}-A_h x)\Omega(q^h x)=0,\end{gathered}\tag{67}$$

wo

$$\Omega(x)=U(x)-\varphi(x).$$

Die allgemeine Lösung von (67) ist durch (65) oder (66) gegeben und lautet:

$$\begin{aligned}\Omega(x)&=K_1(x)U_1(x)+K_2(x)U_2(x)+\cdots+K_h(x)U_h(x)\\ &=K_1'(x)V_1(x)+K_2'(x)V_2(x)+\cdots+K_h'(x)V_h(x)\end{aligned}$$

und daher ist

$$\begin{aligned}U(x)&=\varphi(x)+K_1(x)U_1(x)+K_2(x)U_2(x)+\cdots+K_h(x)U_h(x)\\ &=\varphi(x)+K_1'(x)U_1(x)+K_2'(x)U_2(x)+\cdots+K_h'(x)U_h(x)\end{aligned}\tag{68}$$

die vollständige Lösung der Gleichung (56). Die vollständige Lösung der nichthomogenen Gleichung setzt sich also aus einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung zusammen.

15. Die Gleichung zweiter Ordnung.

Die nicht homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung hat die Form[1])

$$\begin{gathered}(1-x)U(x)-(q^{\gamma-1}+q^{\delta-1}-x\cdot q^{\alpha}+q^{\beta})U(qx)\\ +(q^{\gamma+\delta-2}-x\,q^{\alpha+\beta})\,U(q^2x)=(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\delta-1}).\end{gathered}\tag{69}$$

[1]) Siehe Pringsheim, Sitzungsber. 41 (1911), p. 64.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt, daß die vollständige Lösung dieser Gleichung im allgemeinen folgende ist:

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, \\ \gamma, & \delta,\end{matrix} q, x\right) + K_1(x)\, x^{1-\gamma}\, \varphi\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1, & \beta-\gamma+1, \\ 1 & , \ \gamma-\delta+1,\end{matrix} q, x\right) \\
&\quad + K_2(x)\, x^{1-\delta}\, \varphi\left(\begin{matrix}\alpha-\delta+1, & \beta-\delta+1, \\ 1 & , \ \delta-\gamma+1,\end{matrix} q, x\right) \qquad (70) \\
&\varphi\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, \\ \gamma, & \delta,\end{matrix} q, x\right) + K_1'(x)\, x^{-\alpha}\, \varphi\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1, & \alpha-\delta+1, \\ 1 & , \ \alpha-\beta+1,\end{matrix} q, x\right) \\
&\quad + K_2'(x)\, x^{-\beta}\, \varphi\left(\begin{matrix}\beta-\gamma+1, & \beta-\delta+1, \\ 1 & , \ \beta-\alpha+1,\end{matrix} q, x\right).
\end{aligned}
$$

Ist $\gamma - \delta$ gleich Null oder gleich einer ganzen Zahl, so entstehen Ausnahmefälle für (70), und analog, wenn $\alpha - \beta$ Null oder gleich einer ganzen Zahl ist, für (71).

Für $\delta = 1$ reduziert sich Gleichung (69) auf die gewöhnliche Heinesche Differenzengleichung

$$
\begin{aligned}
&(1-x)\, U(x) - (1 + q^{\gamma-1} - x \cdot q^{\alpha} + q^{\beta})\, U(qx) \\
&\quad + (q^{\gamma-1} - x\, q^{\alpha+\beta})\, U(q^2 x) = 0\,.
\end{aligned} \qquad (72)
$$

Man erkennt unmittelbar, daß die Lösungen dieser Gleichung, ausgenommen für den Fall, wo $\gamma - 1$ oder $\beta - \alpha$ gleich einer ganzen Zahl oder Null ist, folgende sind:

$$
\begin{aligned}
U_1(x) &= \varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x) \\
U_2(x) &= x^{1-\gamma}\, \varphi\ (\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ x)
\end{aligned} \qquad (73)
$$

$$
\begin{aligned}
V_1(x) &= x^{-\alpha}\, \varphi\left(\alpha-\gamma+1,\ \alpha,\ \alpha-\beta+1,\ q,\ \frac{q^{1+\gamma-\alpha-\beta}}{x}\right) \\
V_2(x) &= x^{-\beta}\, \varphi\left(\beta-\gamma+1,\ \beta,\ \beta-\alpha+1,\ q,\ \frac{q^{1+\gamma-\alpha-\beta}}{x}\right).
\end{aligned} \qquad (74)
$$

Wenn man die Determinante von (73) bildet, so ergibt sich also

$$
\begin{vmatrix} U_1(x) & U_1(qx) \\ U_2(x) & U_2(qx) \end{vmatrix} = K(x)\, x^{1-\gamma}\, \varphi(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x). \qquad (75)
$$

Ersetzt man x durch $q^n x$ und läßt n ins Unendliche wachsen, so findet man endlich

$$K(x) = 1 - q^{\gamma-1}.$$

Hieraus folgt, daß außer dem Fall $\gamma = 1$ die Determinante (75) nicht verschwindet und daher $U_1(x)$ und $U_2(x)$, wenn sie überhaupt existieren, ein Fundamentalsystem bilden. Entsprechende Resultate ergeben sich für $V_1(x)$ und $V_2(x)$.

Im Anschluß an die asymptotische Darstellung der Heineschen Reihe (siehe 9) lassen sich sehr wichtige Relationen zwischen den Lösungen $U_1(x)$, $U_2(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$ aufstellen und zwar ist durch diese Relationen die analytische Fortsetzung der Heineschen Funktion außerhalb des Einheitskreises gegeben.

Aus (64) folgt, daß

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x) \\ (76)\quad &= K_1(x)\, x^{-\alpha}\, \varphi\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ q,\ \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right) \\ &+ K_2(x)\, x^{-\beta}\, \varphi\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ q,\ \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right) \end{aligned}$$

und zwar muß diese Relation für alle Werte der Parameter α, β, γ, für welche die betreffenden Reihen einen Sinn haben, bestehen. Multipliziert man (76) mit x^α und ersetzt x durch $\frac{x}{q^n}$, so ist

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{q^n}\right)^\alpha \varphi\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ \frac{x}{q^n}\right) \\ &= K_1(x)\, \varphi\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ q,\ \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1+n}}{x}\right) \\ &+ K_2(x)\, \varphi\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ q,\ \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1+n}}{x}\right). \end{aligned}$$

Ist $|q^{\alpha-\beta}|<1$, so folgt unter Berücksichtigung der Relation (48) für $\lim n = \infty$

$$K_2(x) = x^\alpha \frac{\varphi(\alpha,\ 1,\ 1,\ q,\ x)}{\varphi\left(\alpha,\ 1,\ 1,\ q,\ \frac{q^{1-\alpha}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\beta+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})\,(1-q^{\beta-\alpha+\nu})}.$$

Wegen der symmetrischen Eigenschaften ist ferner

$$K_2(x) = x^\beta \frac{\varphi(\beta, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\beta, 1, 1, q, \frac{q^{1-\beta}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\alpha-\beta+\nu})}.$$

Endlich ist[1])

(77)
$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$
$$= \frac{\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\alpha, 1, 1, q, \frac{q^{1-\alpha}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\beta+\nu})(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\beta-\alpha+\nu})} \varphi\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, q, \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right)$$
$$+ \frac{\varphi(\beta, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\beta, 1, 1, q, \frac{q^{1-\beta}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\alpha-\beta+\nu})} \varphi\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, q, \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right).$$

Diese Relation (77) ist unter gewissen Beschränkungen von α und β abgeleitet, aber sie gilt für beliebige Werte dieser Parameter, weil $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ als Funktion einer komplexen Variablen nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden kann. Die analytische Fortsetzung der durch $\varphi(x)$ definierten Funktion über den Einheitskreis hinaus ist also durch (77) hergestellt.

Entsprechende Resultate bestehen für die Reihe $U_2(x)$ und es folgt, daß

(78)
$$\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, q, x)$$
$$= \frac{\varphi(\alpha-\gamma+1, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\alpha-\gamma+1, 1, 1, \frac{q^{\gamma-\alpha}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})(1-q^{1-\alpha+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})(1-q^{\beta-\alpha+\nu})} \varphi\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, q, \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right)$$
$$+ \frac{\varphi(\beta-\gamma+1, 1, 1, q, x)}{\varphi\left(\alpha-\gamma+1, 1, 1, \frac{q^{\gamma-\beta}}{x}\right)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{1-\beta+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})(1-q^{\alpha-\beta+\nu})} \varphi\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, q, \frac{q^{\gamma-\alpha-\beta+1}}{x}\right).$$

[1]) Vgl. Watson, Trans. Camb. Phil. Soc. 21 (1910), p. 28 und Thomae, Ann. di Mat. (serie II) 4 (1869), p. 124.

16. Die Ausnahmefälle.

Für $1-\gamma$ gleich Null oder einer ganzen Zahl liefert die vorhergehende Methode kein Fundamentalsystem von Lösungen. Für $1-\gamma=0$ sieht man ohne weiteres, daß

$$U_1(x) = U_2(x).$$

Ist $1-\gamma$ gleich einer positiven ganzen Zahl n, so sind alle Koeffizienten der Reihe $U_1(x)$ von einem bestimmten Glied ab unendlich. Man erhält zwar eine bestimmte Funktion als Grenzwert von $(1-q^{\gamma+n-1})\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$, wenn man $\gamma+n-1$ gegen Null konvergieren läßt, nämlich die Reihe:

$$x^n \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\beta})\ldots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)(1-q^{\gamma})\ldots(1-q^{\gamma+n-1})}$$
$$\varphi(\alpha+n,\ \beta+n,\ 1+n,\ q,\ x).$$

Jedoch gewinnt man auf diesem Weg keine zweite partikuläre Lösung, weil wiederum $U_1(x)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich $U_2(x)$ ist. Für $1-\gamma$ gleich einer negativen ganzen Zahl verliert $U_2(x)$ seine Gültigkeit. Wir erhalten durch einen ähnlichen Grenzübergang ein analoges Resultat, wie oben für $1-\gamma$ gleich einer positiven Zahl. Die beiden Reihen $U_1(x)$ und $U_2(x)$ ergeben bei diesen Ausnahmefällen nur je eine Lösung der Differenzengleichung (72), aber diese eine partikuläre Lösung kann unter allen Umständen durch diese Methode gefunden werden.

Man kann übrigens immer, um aus einer partikulären Lösung eine zweite zu ermitteln, den folgenden Weg einschlagen. Ist $U_1(x)$ die bekannte Lösung, so folgt wegen (60), daß eine zweite Lösung $U_2(x)$ existieren muß derart, daß

$$\begin{vmatrix} U_1(x) & U_1(qx) \\ U_2(x) & U_2(qx) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Es folgt wegen (75), daß

$$U_1(x)\,U_2(qx) - U_2(x)\,U_1(qx) = K(x)\,x^{1-\gamma}\,\varphi(\alpha+\beta+\gamma+1,1,1,q,x)$$

oder nach Division durch $U_1(x)\,U_1(qx)$:

$$\frac{U_2(qx)}{U_1(qx)} - \frac{U_2(x)}{U_1(x)} = K(x)\, x^{1-\gamma}\, \frac{\varphi(\alpha+\beta-\gamma+1, 1, 1, q, x)}{U_1(x)\, U_1(qx)}.$$

Ersetzt man $\dfrac{U_2(x)}{U_1(x)}$ durch $\Omega(x)$,

so ergibt sich also

$$\Omega(qx) - \Omega(x) = R(x), \tag{79}$$

wo $R(x)$ bis auf eine beliebige K-Funktion bestimmt ist.

Die Lösung der Gleichung (79) ist schon bekannt[1]) und hieraus folgt, daß $\Omega(x)$ und daher $U_2(x)$ durch die partikuläre Lösung $U_1(x)$ gegeben ist.

17. Die zweite Lösung für $\gamma - 1 = 0$.

Die durch Gleichung (79) gegebene zweite Lösung von Gleichung (72) nimmt im allgemeinen eine ziemlich komplizierte Form an. Daher soll jetzt eine andere Methode zur Herstellung der zweiten Lösung in expliziter Form angegeben werden.

Bei unbestimmten γ ist die lineare homogene Funktion

$$K_1(x)\, U_1(x) + K_2(x)\, U_2(x)$$

eine Lösung der Gleichung (72). Ist

$$K_1(x) = -K_2(x) = \frac{1}{1-q^{\gamma-1}},$$

so ist auch

$$\frac{1}{1-q^{\gamma-1}}\{U_1(x) - U_2(x)\}$$

eine Lösung. Wenn $\lim \gamma = 1$, so erhält man aus dieser Lösung die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, aber der Grenzwert läßt sich durch Differentiation bestimmen. Es folgt, daß für $\gamma - 1 = 0$ die zweite partikuläre Lösung bis auf einen konstanten Faktor durch

$$\left\{\frac{\partial U_1(x)}{\partial \gamma} - \frac{\partial U_2(x)}{\partial \gamma}\right\}_{\gamma=1}$$

dargestellt werden kann.

[1]) Jackson, Americ. Journ. of Math. 32 (1910), p. 311.

Man hat

$$\frac{\partial U_1(x)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}{\partial \gamma}$$

$$\frac{\partial U_2(x)}{\partial \gamma} = x^{1-\gamma} \frac{\partial \varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, q, x)}{\partial \gamma}$$

$$- \log x \cdot x^{1-\gamma} \varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, q, x).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_n = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{1+\nu})(1-q^{\gamma+\nu})}$$

$$B_n = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{(1-q^{\alpha-\gamma+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+\nu})}{(1-q^{1+\nu})(1-q^{2-\gamma+\nu})},$$

so ist

$$U_1(x) = 1 + \sum_0^\infty{}^n A_n x^n$$

$$U_2(x) = x^{1+\gamma} \{1 + \sum_0^\infty{}^n B_n x^n\}.$$

Es folgt nun, daß

$$\frac{\partial \log A_n}{\partial \gamma} = \log q \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{q^{\gamma+\nu}}{1-q^{\gamma+\nu}}$$

$$\frac{\partial \log B_n}{\partial \gamma} = \log q \sum_0^\infty{}^\nu \left\{ \frac{q^{\alpha-\gamma+\nu-1}}{1-q^{\alpha-\gamma+\nu+1}} + \frac{q^{\beta-\gamma+\nu+1}}{1-q^{\beta-\gamma+\nu+1}} - \frac{q^{2-\gamma+\nu}}{1-q^{2-\gamma+\nu}} \right\}.$$

Setzt man hier nun $\gamma = 1$, so ist

$$A_n = B_n$$

und

$$\frac{\partial A_n}{\partial \gamma} - \frac{\partial B_n}{\partial \gamma} = a_n A_n,$$

wobei

$$a_n = - \log q \sum_0^{n-1}{}^\nu \left\{ \frac{q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\alpha+\nu}} + \frac{q^{\beta+\nu}}{1-q^{\beta+\nu}} - 2\frac{q^{1+\nu}}{1-q^{1+\nu}} \right\}$$

$$= - \log q \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{q^\nu}{1-q^{1+\nu}} \left\{ \frac{1-q^\alpha}{1-q^{\alpha+\nu}} + \frac{1-q^\beta}{1-q^{\beta+\nu}} \right\}.$$

A_n ist also ein Ausdruck, der bei unendlich wachsendem n einen endlichen Grenzwert hat, und folglich ist die Reihe

$$\Phi(\alpha, \beta, 1, q, x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} a_n A_n x^n \tag{80}$$

im Einheitskreis konvergent.

Man erhält schließlich für die beiden partikulären Lösungen der Heineschen Differenzengleichung für den Fall $\gamma - 1 = 0$ die Entwicklungen

$$\varphi(\alpha, \beta, 1, q, x)$$

und

$$\log x \, \varphi(\alpha, \beta, 1, q, x) + \Phi(\alpha, \beta, 1, q, x),$$

die im Einheitskreis gültig sind. Hierbei wurde zunächst angenommen, daß α und β weder negative ganze Zahlen noch Null sind; indessen lassen diese Fälle sich ohne besondere Schwierigkeiten erledigen.

18. Die zweite Lösung für den Fall $1 - \gamma$ gleich einer ganzen Zahl.

Ist $1 - \gamma$ eine positive Zahl n, so hat $U_1(x)$ keinen Sinn, aber $U_2(x)$ existiert und ist eine partikuläre Lösung der Gleichung (72).

Setzt man in der allgemeinen Lösung

$$K_1(x)\, U_1(x) + K_2(x)\, U_2(x)$$

für die beliebigen K-Funktionen $K_1(x)$ und $K_2(x)$ folgende:

$$K_1(x) = \frac{1 - q^{\gamma+n-1}}{1 - q^{\gamma+n-1}} = 1$$

$$K_2(x) = -\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})},$$

so ist bei unbestimmtem γ

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) \tag{81}$$

$$-\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})} x^{1-\gamma} \varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, q, x),$$

eine Lösung der Gleichung, die sich für $1 - \gamma = n$ auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ reduziert.

Man hat

$$(1-q^{\gamma+n-1})\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$$
$$=(1-q^{\gamma+n-1})\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)\dots(1-q^\nu)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+\nu-1})}x^\nu$$
$$+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})}x^n\varphi\left(\begin{matrix}\alpha+n,\beta+n,\\ 1+n,\gamma+n,\end{matrix}q,x\right).$$

Daher erhält man als zweite partikuläre Lösung

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)\dots(1-q^\nu)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+\nu-1})}x^\nu$$
$$+\lim_{\gamma+n-1=0}\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\beta+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\gamma+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})}\left\{x^n\varphi\left(\begin{matrix}\alpha+n,\beta+n,\\ 1+n,\gamma+n,\end{matrix}q,x\right)\right.$$
$$\left.-x^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ x)\right\}.$$

Der Limes des zweiten Teiles dieses Ausdruckes läßt sich nach der Methode des vorhergehenden Abschnittes bestimmen, und man erhält für die zwei partikulären Lösungen

$$(82)\quad\begin{cases} x^n\varphi(\alpha+n,\ \beta+n,\ 1+n,\ q,\ x) \\ \text{und} \\ \displaystyle\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)\dots(1-q^\nu)(1-q^{1-n})\dots(1-q^{\nu-n})}x^\nu \\ \displaystyle+x^n\frac{\log x}{\log q}\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^{1-n})\dots(1-q^{-1})}\varphi(\alpha+n,\beta+n,1+n,q,x) \\ \displaystyle+x^n\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^{1-n})\dots(1-q^{-1})}\sum_0^\infty{}_\lambda\, b_\lambda B_\lambda x^\lambda, \end{cases}$$

wobei

$$b_\lambda=\prod_{\nu=0}^{\lambda-1}\frac{(1-q^{\alpha+n+\nu})(1-q^{\beta+n+\nu})}{(1-q^{n+1+\nu})(1-q^{1+\nu})}$$

$$B_\lambda=-\sum_0^{\lambda-1}{}_\nu\left\{\frac{q^{\alpha+n+\nu}}{1-q^{\alpha+n-1}}+\frac{q^{\beta+n+\nu}}{1-q^{\beta+n-\nu}}-\frac{q^{\nu+1}}{1-q^{\nu+1}}-\frac{q^{n+\nu+1}}{1-q^{n+\nu+1}}\right\}.$$

Für $1-\gamma$ gleich einer negativen Zahl $1-n$ kann man dieselbe Methode anwenden, und es ergibt sich für die zwei partikulären Lösungen

$$(83)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha,\ \beta,\ 1+n,\ q,\ x) \\ \text{und} \\ \displaystyle\sum_0^{n-1}{}^{\nu} \frac{(1-q^{\alpha-n})\dots(1-q^{\alpha-n+\nu-1})\,(1-q^{\beta-n})\dots(1-q^{\beta-n+\nu-1})}{(1-q)\dots(1-q^{\nu})\,(1-q^{1-n})\dots(1-q^{\nu-n})}\,x^{\nu-n} \\ \displaystyle+\frac{\log x}{\log q}\,\frac{(1-q^{\alpha-n})\dots(1-q^{\alpha-1})\,(1-q^{\beta-n})\dots(1-q^{\beta-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n})\,(1-q^{1-n})\dots(1-q^{-1})}\,\varphi(\alpha,\beta,1+n,q,x) \\ \displaystyle+\frac{(1-q^{\alpha-n})\dots(1-q^{\alpha-1})\,(1-q^{\beta-n})\dots(1-q^{\beta-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n})\,(1-q^{1-n})\dots(1-q^{-1})}\sum_0^{\infty}{}^{\lambda} c_\lambda\,C_\lambda\,x^\lambda, \end{cases}$$

wobei

$$C_\lambda = \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \frac{(1-q^{\alpha-\nu})\,(1-q^{\beta-\nu})}{(1-q^{n+1+\nu})\,(1-q^{1+\nu})}$$

$$c_\lambda = \sum_0^{\lambda-1}{}^{\nu} \left\{ \frac{q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\alpha+\nu}} + \frac{q^{\beta+\nu}}{1-q^{\beta+\nu}} - \frac{q^{\nu+1}}{1-q^{\nu+1}} - \frac{q^{n+\nu+1}}{1-q^{n+\nu+1}} \right\}$$ [1].

19. Lösung der Heineschen Differenzengleichung durch eine unendliche Determinante.

Man kann die Heinesche Differenzengleichung statt durch Einführung von unendlichen Reihen auch mit Hilfe von unendlichen Determinanten integrieren. Setzt man in (72)

$$(84)\qquad U(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1-q^\nu x)\,f(x),$$

so ergibt sich

$$(85)\qquad \begin{aligned} &f(x) - (1+q^{\gamma-1} - x\cdot q^\alpha + q^\beta)\,f(qx) \\ &+ (1-qx)\,(q^{\gamma-1} - x\,q^{\alpha+\beta})\,f(q^2x) = 0. \end{aligned}$$

[1]) Die Resultate dieses Abschnitts sind im wesentlichen bei Rev. J. H. Jackson, Americ. Journ. of Math. 32 (1910), p. 310 durch eine ganz andere Methode gefunden.

Diese Gleichung wird durch die unendliche Determinante

$$(86)\qquad D(x)=\begin{vmatrix} 1+q^{\gamma-1}-x(q^{\alpha}+q^{\beta}) & 1-qx & 0 & \dots \\ q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta} & 1+q^{\gamma-1}-qx(q^{\alpha}+q^{\beta}) & 1-q^{2}x & \dots \\ 0 & q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta+1} & 1-q^{\gamma-1}-q^{2}x(q^{\alpha}+q^{\beta}) & \dots \\ - & - & - & - \end{vmatrix}$$

formal befriedigt. Allein nur dann, wenn die Determinante wirklich konvergiert, hat dieser Ansatz einen Sinn.

Wir zeigen jetzt, daß die Determinante in jedem endlichen Bereiche konvergiert, sofern $|q^{\gamma-1}|<1$ ist. Betrachtet man die aus den ersten $n+1$ Zeilen und Spalten von (86) bestehende Determinante

$$(87)\qquad D_n=\begin{vmatrix} 1+q^{\gamma-1}-x(q^{\alpha}+q^{\beta}) & 1-qx & 0 & \dots & 0 \\ q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta} & 1+q^{\gamma-1}-qx(q^{\alpha}+q^{\beta}) & 1\ q^{2}x & \dots & 0 \\ 0 & q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta+1} & 1+q^{\gamma-1}-q^{2}x(q^{\alpha}+q^{\beta}) & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0\dots 1+q^{\gamma-1}-q^{n}x(q^{\alpha}+q^{\beta}) & & \end{vmatrix}$$

für $n\geq 1$ und speziell für $n=0$

$$D_0=1+q^{\gamma-1}-x(q^{\alpha}+q^{\beta}),$$

so folgt

$$\lim_{n=\infty} D_n = D$$

und weiter ist

$$D_{n+1}=D_0+(D_1-D_0)+(D_2-D_1)+\dots \\ +(D_n-D_{n+1})+(D_{n+1}-D_n).$$

Die Reihe $\lim\limits_{n=\infty} D_{n+1}$ konvergiert absolut, wenn

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{D_{n+1}-D_n}{D_n-D_{n-1}}\right|$$

für unendlich wachsendes n gegen eine Zahl konvergiert, die kleiner ist als Eins.

Es folgt aus (87), daß

$$D_{n+1}-D_n=(q^{\gamma-1}-x(q^{\alpha+n+1}+q^{\beta+n+1}))D_n \\ -(1-q^{n+1}x)(q^{\gamma-1}-xq^{\alpha+\beta+n})D_{n-1}$$

oder

$$D_{n+1} = (1 + q^{\gamma-1} - x(q^{\alpha+n+1} + q^{\beta+n+1}))\, D_n$$
$$- (1 - q^{n+1}x)(q^{\gamma-1} - x\, q^{\alpha+n+1})\, D_{n-1}.$$

Hieraus ergibt sich sofort, daß

$$\frac{D_{n+1} - D_n}{D_n - D_{n-1}} = \frac{(q^{\gamma-1} - x(q^{\alpha+n+1} + q^{\beta+n+1}))\, D_n - (1 - q^{n+1}x)(q^{\gamma-1} - x\, q^{\alpha+\beta+n})\, D_{n-1}}{D_n - D_{n-1}}.$$

Daher ist für alle endlichen Werte von n

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{D_{n+1} - D_n}{D_n - D_{n-1}} \right| = |q^{\gamma-1}|.$$

Man sieht also, daß $\lim_{n=\infty} D_n$ konvergiert, wenn $|q^{\gamma-1}| < 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung liefert die Determinante (86) eine Lösung der Differenzengleichung (85). Es ist also

$$U(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^\nu x)\, D(x) \tag{88}$$

eine partikuläre Lösung der Heinesche Differenzengleichung.

Nach (64) kann man schreiben

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^\nu x) \cdot D(x) = K_1(x)\, \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$
$$+ K_2(x)\, x^{1-\gamma}\, \varphi(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ q,\ x)$$

oder

$$x^{1-\gamma} \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^\nu x) \cdot D(x) = x^{\gamma-1} K_1(x)\, \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$
$$+ K_2(x)\, \varphi(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ q,\ x).$$

Um $K_1(x)$ und $K_2(x)$ zu bestimmen, ersetzt man x durch $q^n x$ und läßt n ins Unendliche wachsen. Es ergibt sich dann, weil $|q^{\gamma-1}| < 1$ ist,

$$K_2(x) = 0,$$

so daß

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^{\nu}x)\,D(x) = K_1(x)\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$$

und hieraus folgt

$$K_1(x) = D(0).$$

Für $x=1$ kann man (86) wirklich ausrechnen und erhält

$$\begin{aligned} D(0) &= 1 + q^{\gamma-1} + q^{2(\gamma-1)} + q^{3(\gamma-1)} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-q^{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$K_1(x) = \frac{1}{1-q^{\gamma-1}}$$

und daraus folgt

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-q^{\gamma-1}}\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-q^{\nu}x)\cdot D(x). \tag{89}$$

Der Fall $|q^{\gamma-1}|>1$ oder, was daselbe bedeutet, der Fall $R(\gamma)<1$, wobei $R(\gamma)$ der reelle Teil von γ ist, läßt sich auf den Fall $R(\gamma)>1$ reduzieren. Man findet leicht

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x) \\ &= \frac{1}{1-q^{\gamma-1}}\{\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1,q,x) - q^{\gamma-1}\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1,q,qx)\}. \end{aligned} \tag{90}$$

Durch Wiederholung dieser Formeln kann man die Funktion, in welcher $R(\gamma)<1$ ist, immer auf eine lineare Kombination von Funktionen mit $R(\gamma+k)\geqq 1$ zurückführen, wobei k eine positive ganze Zahl ist.

§ 5.

Der Zusammenhang der Heineschen und hypergeometrischen Reihe.

20. Der Grenzfall $q = 1$.

Ersetzen wir in der Heineschen Reihe q durch $1 + \varepsilon$, wobei ε eine beliebige kleine Größe bedeutet, so hat man

$$\lim_{q=1} \frac{1-q^\lambda}{1-q} = \lim_{\varepsilon=1} \frac{(1+\varepsilon)^\lambda - 1}{\varepsilon} = \lambda \tag{91}$$

und daher

$$\lim_{q=1} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

wo

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \cdots \tag{92}$$

Dies ist aber die gewöhnliche hypergeometrische Reihe.

Gleichzeitig reduziert sich auch die Heinesche Differenzengleichung auf die hypergeometrische Differentialgleichung. Der Grenzübergang von der Differenzengleichung zur Differentialgleichung ist bei Heine[1]) im wesentlichen auf die Bestimmung einer unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ zurückgeführt. Man kann auch dasselbe Resultat durch Einführung der benachbarten Funktionen sehr leicht erhalten.

Setzt man

$$\varphi_1(x) = \varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, q, x)$$
$$\varphi_2(x) = \varphi(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 2, q, x),$$

so ergibt sich nach (5)

$$\varphi(qx) = \varphi(x) - \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{1-q^\gamma} x \varphi_1(x)$$

$$\varphi(q^2 x) = \varphi(x) - \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)(1+q)}{1-q^\gamma} x \varphi_1(x)$$
$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)(1+q^{\alpha+1})(1-q^{\beta+1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} q x^2 \varphi_2(x).$$

---

[1]) Heine, Journ. für Math. 34 (1847), p. 316.

Substituiert man diese Resultate in (72), so erhält man

$$\varphi(x) - \frac{1 - x\,(q^{\alpha} + q^{\beta} - q^{\alpha+\beta}\,(1-q))}{1-q^{\gamma}}\,\varphi_1(x)$$

$$(93)\qquad - (q^{\gamma-1} - x\,q^{\alpha+\beta})\,\frac{(1-q^{\alpha+1})\,(1-q^{\beta+1})}{(1-q^{\gamma})\,(1-q^{\gamma+1})}\,q\,x\,\varphi_2(x) = 0.$$

Für $\lim q = 1$ hat man somit aus dieser Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \left\{1 - x\left(\frac{\alpha+\beta-1}{\gamma}\right)\right\} F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)$$

$$- x\,(1-x)\,\frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\,F(\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2,\ x) = 0,$$

wobei $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die hypergeometrische Reihe (92) bedeutet.

Nun ist

$$F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x) = \frac{\gamma}{\alpha\cdot\beta}\,\frac{d\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d\,x}$$

$$F(\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2,\ x) = \frac{\gamma\,(\gamma+1)}{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}\,\frac{d^2\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d\,x^2}$$

und daher folgt aus (93)

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d\,x^2}$$

$$(94)\qquad + (\gamma - x\,(\alpha+\beta-1))\,\frac{d\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d\,x} - \alpha\,\beta\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als die hypergeometrische Differentialgleichung.

21. Singuläre Stellen der hypergeometrischen Reihe.

Bei dem Grenzübergang $\lim q = 1$ tritt ein scheinbarer Widerspruch auf, weil als Grenzfall der eindeutigen Funktion $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ mit unendlichen vielen Polen die im allgemeinen vieldeutige hypergeometrische Funktion mit der singulären Stelle $x = 1$ sich ergibt. Um diesen Grenzübergang als speziellen

Fall genauer zu betrachten, soll zuerst die einfache Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ behandelt werden. Es ergibt sich hier

$$(95) \qquad \lim_{q=1} \varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = F(\alpha, 1, 1, x) = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}.$$

Daher ist der Limes (außer für den Fall, wo α ganzzahlig ist) eine vieldeutige Funktion, welche sich an der Stelle $x=1$ verzweigt. In seiner Abhandlnng über die Funktionen, welche durch Heinesche Reihen definiert sind, gibt Thomae als eine Lösung der Differenzengleichung

$$(1-x)\,U(x) = (1-q^{\alpha}x)\,U(qx)$$

die Funktionen[1])

$$(96) \qquad p(\alpha, q, x) = \lim_{n=\infty} (1-q^{n}x)^{-\alpha} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1-q^{\alpha+\nu}x}{1-q^{\nu}x}$$

an, welche sowohl für $|q|<1$ als auch $|q|>1$ einen Sinn hat. Das erstere ist evident. Das letztere folgt sofort daraus, daß man dieser Funktion die Form geben kann

$$p(\alpha, q, x) = \lim_{n=\infty} (-x)^{\alpha} \left(1-\frac{1}{xq^{n}}\right)^{-\alpha} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1-\dfrac{1}{q^{\alpha+\nu}x}}{1-\dfrac{1}{q^{\nu}x}}$$

oder anders geschrieben

$$p(\alpha, q, x) = (-x)^{\alpha} p\left(\alpha, \frac{1}{q}, \frac{1}{x}\right),$$

so daß sich der Fall $|q|>1$ auf den Fall $|q|<1$ zurückführen läßt. Für $q=1$ ist das unendliche Produkt gleich eins und man hat nur $(1-x)^{-\alpha}$.

Man bemerkt, daß $p(\alpha, q, x)$ eine analytische Funktion der beiden Veränderlichen q und x ist, und für $|q|<1$ mit der analytischen Funktion $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ identisch ist. Es folgt daher, daß die beiden Funktionen und ihre analytischen Fortsetzungen überall identisch sind.

[1]) Thomae, Journ. für Math. 70 (1869), p. 262.

Man hat dann

$$(97) \quad \varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = \lim_{n=\infty} (1 - q^n x)^{-\alpha} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1 - q^{\alpha+\nu} x}{1 - q^\nu x}.$$

Aus dieser Form von $\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$ folgt also, daß für $|q| \neq 1$ der vieldeutige Faktor $\lim_{n=\infty} (1 - q^n x)^{-\alpha}$ sich auf eins reduziert und es bleibt nur das eindeutige unendliche Produkt. Nur für $q = 1$ hat man

$$\lim_{n=\infty} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1 - q^{\alpha+\nu} x}{1 - q^\nu x} = 1,$$

so daß also die Funktion sich wie $(1 - q)^{-\alpha}$ verzweigt.

Hiernach läßt sich zwar das Auftreten des Verzweigungspunktes $x = 1$ für die hypergeometrische Reihe nicht durch das Zusammenfallen der unendlich vielen Pole der Heineschen Reihe erklären, wohl aber lassen sich beide Arten von Singularitäten aus einer gemeinsamen Quelle herleiten.

Die Behandlung der vollständigen Heineschen Reihe können wir auf den vorhergehenden Spezialfall zurückführen. Zu diesem Zwecke sind zuerst die Lösungen der Heineschen Differenzengleichung, die an der Stelle $x = 1$ konvergieren, zu finden.

22. Lösungen der Heineschen Differenzengleichung in der Nähe $x = 1$.

Wenn eine Lösung der Differenzengleichung (72) existiert, welche für alle x zwischen Null und eins endlich bleibt, so bleibt sie außer für $x = 0$ und $x = \infty$ überall endlich, wenn sie für $x = 1$ endlich ist. Diese Eigenschaft der Lösung folgt aus der Gleichung selbst, welche eine lineare Relation zwischen den Funktionen $U(x)$, $U(qx)$ und $U(q^2 x)$ definiert. Durch diese Relation kann man die Funktion über das Kreisgebiet $|x| = 1$ hinaus fortsetzen, und es kann sich hierbei nur dann ein unendlich großer Wert ergeben, wenn der Koeffizient von $U(x)$ verschwindet, was nur für $x = 1$ eintritt.

Ist $p_1(x)$ irgend eine eindeutige analytische Funktion, welche die Gleichung (72) befriedigt und welche für $x = 1$ regulären Verhaltens ist, so besitzt sie außer für $x = 0$ und $x = \infty$ überall diesen Charakter. Zur Bestimmung dieser Funktion geht man auf (64) zurück. Es ergibt sich nämlich hieraus, daß

$$(98)\qquad \begin{aligned} &A_1 \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) \\ &- A_2 x^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ q,\ x) \end{aligned}$$

eine solche Funktion $p_1(x)$ ist, wenn die Konstanten A_1 und A_2 so eingerichtet sind, daß der Ausdruck für $x = 1$ endlich bleibt.

Weiter folgt, daß $p_1(x)$ für $x = 1$ nur dann endlich bleiben kann, wenn

$$(99)\quad (1 + q^{\gamma-1} - q^{\alpha} - q^{\beta})\, p_1(q) - (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta})\, p_1(q^2) = 0.$$

Substituiert man den Ausdruck (98) für $p_1(x)$ in (99), so folgt

$$\begin{aligned} &(1 + q^{\gamma-1} - q^{\alpha} - q^{\beta}) \{A_1 \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q) \\ &+ A_2 q^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ q,\ q)\} \\ &= (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta}) \{A_1 \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^2) \\ &+ A_2 q^{2(1-\gamma)} \varphi(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ q,\ q^2)\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &A_1\{(1+q^{\gamma-1}-q^{\alpha}-q^{\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q) - (q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^2)\} \\ &= -A_2\{(1+q^{\gamma-1}-q^{\alpha}-q^{\beta})\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ q) \\ &\quad -(q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta})q^{2(1-\gamma)}\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ q^2)\}, \end{aligned}$$

aus (72) und (43) erhält man also

$$\begin{aligned} &(1+q^{\gamma-1}-q^{\alpha}-q^{\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q) - (q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^2) \\ &\qquad = \lim_{x=1} (1-x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x) \\ &\qquad = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{1+\nu})(1-q^{\gamma+\nu})}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(1+q^{\gamma-1}-q^{\alpha}-q^{\beta})\,q^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ q)$$
$$-(q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta})\,q^{2(1-\gamma)}\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ q^2)$$
$$=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})}{(1-q^{1+\nu})(1-q^{2-\gamma+\nu})}.$$

Daher muß

$$A_1\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{1-\nu})(1-q^{\gamma+\nu})}$$
$$=-A_2\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})}{(1-q^{1+\nu})(1-q^{2-\gamma+\nu})}.$$

Nehmen wir A_1 beliebig an und zwar zweckmäßig in der Form

$$A_1=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+\nu})},$$

so wird

$$A_2=-\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+\nu})}.$$

Die fragliche Lösung nimmt also die Gestalt an

$$(100)\quad p_1(x)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha-\gamma+1+\nu})(1-q^{\beta-\gamma+1+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+\nu})}\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$$
$$-\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+\nu})}x^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,q,x).$$

Um eine zweite Funktion zu bestimmen, welche mit $p_1(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differenzengleichung bilden soll, substituiert man in (72)

$$U(x)=\varphi(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)\,V(x)$$

und erhält so

$$(101)\quad (1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)V(x)-(1+q^{\gamma-1}-x\cdot q^{\alpha}+q^{\beta})V(qx)$$
$$+q^{\gamma-1}(1-qx)V(q^2x)=0.$$

Setzt man

$$\alpha' = \gamma - \alpha, \quad \beta' = \gamma - \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad x' = x\,q^{\alpha+\beta-\gamma},$$

dann ergibt sich aus (99)

$$(102) \quad \begin{aligned}(1-x')V(x') - (1 + q^{\gamma'-1} - x'\cdot q^{\alpha'} + q^{\beta'})V(q\,x') \\ + (q^{\gamma'-1} - x'\,q^{\alpha'+\beta'})V(q^2 x') = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (72) und man kann also für sie eine Funktion $p_2(x)$ bilden, welche sich an der Stelle $x = 1$ genau wie $p_1(x)$ verhält. Man schreibt

$$\begin{aligned}p_2(x) = B_1\,\varphi\,(\gamma - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma,\ q,\ x\,q^{\alpha+\beta-\gamma}) \\ + B_2\,x^{1-\gamma}\,\varphi(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ q,\ x\,q^{\alpha+\beta-\gamma})\end{aligned}$$

und findet

$$B_1 = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{1-\alpha+\nu})\,(1-q^{1-\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha-\beta+\nu})}$$

$$B_2 = -\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})\,(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha-\beta+\nu})},$$

so daß man wegen (6) hat

$$(103) \quad \begin{aligned}&\varphi\,(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)\,p_2(x) \\ &= \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{1-\alpha+\nu})\,(1-q^{1-\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha-\beta+\nu})}\,\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x) \\ &- \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\gamma-\alpha+\nu})\,(1-q^{\gamma-\beta+\nu})}{(1-q^{2-\gamma+\nu})\,(1-q^{\gamma-\alpha-\beta+\nu})}\,\varphi\,(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ x).\end{aligned}$$

Nimmt man an, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, dann kann man die Gleichung (100) und (103) nach $\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x)$ auflösen und bekommt unmittelbar

$$(104) \quad \begin{aligned}&\varphi\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x) \\ &= C_1\,p_1(x) + C_2\,p_2(x)\,\varphi\,(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x),\end{aligned}$$

wobei

$$C_1 = \frac{B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \qquad C_2 = \frac{B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

23. Anwendung auf die hypergeometrische Reihe.

Auf Grund der Relation (97) kann man schreiben

$$\varphi(\alpha + \beta - \gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$$

$$= \lim_{n=\infty} (1 - q^n x)^{\gamma-\alpha-\beta} \prod_{\nu=0}^{n} \frac{1 - q^{\alpha+\beta-\gamma+n} x}{1 - q^{1+\nu} x} \tag{105}$$

und daher ergibt sich aus (104)

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x) = C_1 p_1(x)$$

$$+ C_2 p_2(x) \left\{ \lim_{n=\infty} (1 - q^n x)^{\gamma-\alpha-\beta} \prod_{\nu=0}^{n} \frac{1 - q^{\alpha+\beta-\gamma+\nu}}{1 - q^{1+\nu} x} \right\}. \tag{106}$$

In dieser Form läßt sich sogleich das Verhalten von $\varphi(x)$ in der Nähe von $x = 1$ und $q = 1$ bestimmen.

Da $p_1(x)$ und $p_2(x)$ bekannte eindeutige Funktionen sind, die außer $x = 0$ und $x = \infty$ überall endlich bleiben, so zeigt Gleichung (106), welcher Zusammenhang zunächst im Falle $|q| \gtrless 1$ zwischen den Polen von $\varphi(\alpha + \beta - \gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$ und $\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ q,\ x)$ besteht.

Für $\lim q = 1$ reduziert sich nach Gleichung (105)

$$\varphi(\alpha + \beta - \gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$$

auf $(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta}$, während die Pole sämtliche wegfallen und es erklärt sich auf diese Weise, daß die in diesem Falle resultierende Grenzfunktion an der Stelle $x = 1$ wie $(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ verzweigt ist, ein Resultat, welches mit dem aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe bereits bekannten übereinstimmt.

Bei dem Grenzübergang zu $q = 1$ findet man aus Gleichungen (100) und (103) unter Benutzung der bekannten Beziehung für hypergeometrische Reihen, daß, da

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x)$$

beziehungsweise

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\alpha,\ \beta-\gamma+\alpha+\beta+1,\ 1-x)$$

sich als lineare Kombination von

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) \quad \text{und} \quad x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$$

ausdrücken läßt, $p_1(x)$ und $p_2(x)$ in

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x)$$

beziehungsweise

$$x^{1-\gamma}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x)$$

übergeht. Gleichung (104) liefert hiernach folgende wichtige Relation für die hypergeometrische Reihe:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = P_1(1-x) + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}P_2(1-x),$$

wobei $P_1(1-x)$ und $P_2(1-x)$ Reihen sind, die nach Potenzen von $(1-x)$ fortschreiten.

Die vorhergehende Betrachtung gilt nicht ausnahmslos. Die Gültigkeit und der Charakter der Resultate hängen in gewisser Weise von den Parametern α, β, γ ab. Erstens müssen

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x) \quad \text{und} \quad x^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ q,\ x)$$

für Gleichung (72) und

$$\varphi(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ q,\ xq^{\alpha+\beta-\gamma})$$

und

$$x^{1-\gamma}\varphi(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ q,\ xq^{\alpha+\beta-\gamma})$$

für Gleichung (101) Fundamentalsysteme bilden. Wie in Abschnitt (16) schon gezeigt wurde, ist diese Bedingung nicht erfüllt, wenn $1-\gamma$ gleich einer ganzen Zahl oder gleich Null ist. Aber diese Fälle verursachen keine Schwierigkeiten, weil man nach der angegebenen Methode auch für sie ein Fundamentalsystem bilden und $p_1(x)$ und $p_2(x)$ bestimmen kann[1]).

[1]) Der Fall $\gamma = 0$ oder γ gleich einer negativen ganzen Zahl ist überhaupt ausgeschlossen, weil die Heinesche Reihe dann keinen Sinn hat.

Zweitens ist erforderlich, daß die Determinante $A_1 B_2 - A_2 B_1$ nicht verschwindet oder, was dasselbe ist,

$$p_1(x) \quad \text{und} \quad p_2(x)\varphi(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$$

ein Fundamentalsystem bilden. Man sieht sofort, daß für $\alpha+\beta-\gamma=0$ die Funktionen

$$p_1(x) \quad \text{und} \quad p_2(x)\varphi(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$$

einander gleich sind. Für $\alpha+\beta-\gamma$ gleich einer positiven Zahl muß entweder B_1 oder B_2 unendlich werden, für $\alpha+\beta-\gamma$ gleich einer negativen Zahl ist dagegen entweder A_1 oder A_2 unendlich, und daher hat eine der beiden Lösungen

$$p_1(x) \quad \text{und} \quad p_2(x)\varphi(\alpha+\beta-\gamma,\ 1,\ 1,\ q,\ x)$$

keinen Sinn. Trotzdem ist es möglich, ähnlich wie bei der Behandlung der Ausnahmefälle in Abschnitt (18), durch einen Grenzübergang eine zweite Lösung, welche dann logarithmische Glieder enthält, zu ermitteln.

Wie diese Untersuchung zeigt, lassen sich alle Haupteigenschaften der hypergeometrischen Reihe durch Grenzbetrachtung aus den sichtlich so heterogenen Eigenschaften der Heineschen ableiten.

§ 6.

Die Heinesche Reihe als eine Funktion von q und x.

24. Analytische Eigenschaften der Funktion.

Wir betrachten jetzt die Heinesche Reihe als Funktion der zwei Veränderlichen q und x. Um diesen Gesichtspunkt zu betonen, schreiben wir zunächst statt $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ nur $\varphi(q, x)$. Es handelt sich dann um eine Reihe von der Form

$$\varphi(q, x) = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu f_\nu(q) x^\nu, \tag{107}$$

wobei

$$f_\nu(q) = \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^\beta)\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\nu)(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})}.$$

Der analytische Charakter dieser Funktion als Funktion der beiden Veränderlichen q und x läßt sich mit Hilfe zweier Sätze von Herrn Hartogs erledigen. Der erste dieser Sätze[1]) bezieht sich auf die Feststellung des Bereiches T der q-Ebene, in welchem $\varphi(q, x)$ sich regulär verhält. Danach ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Reihe eine reguläre analytische Funktion von q und x definiert:

a) daß die Funktionen $f_1(q)$, $f_2(q)$, $f_3(q)$, ..., $f_\nu(q)$, ... in dem Bereich T sämtlich analytische Funktionen von q regulären Verhaltens seien,

b) daß, wenn (q_0, x_0) einen Punkt der qx-Mannigfaltigkeit, in welcher die Reihe definiert ist, bedeutet, die Reihe $\varphi(q, x_0)$ in der Umgebung der Stelle q_0 gleichmäßig konvergiert.

Zur Feststellung eines Bereiches T, in welchem die Koeffizienten $f_\nu(q)$ sich regulär verhalten, betrachten wir zuerst den Quotienten

$$(108) \qquad \frac{(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q^{\nu})(1-q^{\gamma+\nu-1})}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei angenommen werden mag, daß α und β beliebige komplexe oder reelle Zahlen und γ eine beliebige reelle Zahl seien. Der Fall γ gleich einer beliebigen komplexen Zahl soll später behandelt werden. Es ergibt sich alsdann, daß dieser Quotient sich in der Nähe aller Punkte q_0, die im Innern des Kreises $|q| < 1$ liegen (ausgenommen ist Punkt $q = 0$, wenn der reelle Teil von α oder β negativ ist), in eine Potenzreihe von der Form

$$(109) \qquad 1 + a_1(q-q_0) + a_2(q-q_0)^2 + \cdots$$

sich entwickeln läßt. Auf der Peripherie des Kreises $|q| = 1$ sind die Stellen

$$q = e^{\frac{i\varkappa\pi}{\nu}} \quad \text{und} \quad q = e^{\gamma+\nu},$$

[1]) Hartogs, Habilitationsschrift (1905), p. 22.

wobei unter $\varkappa$ und s ganze Zahlen verstanden sind, Singularitäten der sämtlichen Funktionen $f_\nu(q)$. Da aber diese Punkte auf dem Kreise $|q| = 1$ überall dicht liegen, so bilden sie eine Grenze, über welche hinaus die Potenzreihen (109) nicht fortgesetzt werden können. Aus diesem Verhalten der Quotienten von der Form (108) ersieht man, daß die Koeffizienten $f_\nu(q)$ in demselben Kreise analytische Funktionen von q sind (abgesehen von dem Punkt $q = 0$, wenn der reelle Teil von α oder β negativ ist, in welchem Falle der Punkt eine Unendlichkeitsstelle für gewisse der Funktionen $f_\nu(q)$ ist. Es folgt daher, daß alle Punkte im Innern des Kreises $|q| = 1$ der Bedingung a) genügen.

Es soll weiter bewiesen werden, daß die Reihe

$$\varphi(q,\ x_0) = 1 + f_1(q)\, x_0 + f_2(q)\, x_0^2 + \dots$$

für $|q| \leq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergiert, wenn $|x_0| < 1$ ist. Setzen wir

$$R_n(q,\ x_0) = f_n(q)\, x_0^n + f_{n-1}(q)\, x_0^{n+1} + \dots,$$

so ist zu zeigen, daß für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ stets eine Zahl N derart existiert, daß für alle $n > N$ und $|q| \leq \varrho < 0$:

$$|R_n(q,\ x_0)| < \varepsilon. \tag{110}$$

Man erkennt, daß für $|q| < \varrho$ vermöge der Beziehung

$$|1 - q^\alpha| \begin{cases} < |1 + \varrho^{|\alpha|}| \\ > |1 - \varrho^{|\alpha|}| \end{cases}$$

die Zahlen $|f_n(q)|$, $|f_{n+1}(q)|$, ... unter einer endlichen Schranke M bleiben. Daher ist für $|x_0| < 1$:

$$|R_n\, q,\ x_0| < M\,|x_0^n(1 + x_0 + x_0^2 + \cdots)|$$

$$< M \left| \frac{x_0^n}{1 - x_0} \right|.$$

Die obige Reihe konvergiert somit in dem behaupteten Umfange gleichmäßig.

Hieraus folgt aber, daß die Reihe $\varphi(q, x)$ in dem Bereich $|x|<1$, $|q|<1$ eine analytische Funktion der beiden Veränderlichen q und x darstellt (außer im Falle $q=0$, wenn zugleich der reelle Teil von α oder β negativ ist).

Die entsprechenden Eigenschaften ergeben sich auch für $|q|>1$ mit Hilfe der Transformationsgleichung (3), nämlich

$$\varphi(q, x) = \varphi\left(\frac{1}{q},\ q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x\right).$$

Nun tritt in diesem Fall als Bedingung für die Konvergenz noch hinzu, daß

$$|q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x|<1$$

sein muß.

25. Die Singularitäten.

Der zweite Satz[1]) des Herrn Hartogs gestattet die Singularitäten der Funktion $\varphi(q, x)$ als Funktion der beiden Veränderlichen q und x zu behandeln. Verstehen wir unter R_{q_0} die obere Grenze der absoluten Beträge derjenigen Werte von x, für welche $\varphi(q, x)$ in einer gewissen Umgebung von $q=q_0$ gleichmäßig konvergiert, so besagt dieser zweite Satz folgendes: Ist $q=q_0$ eine Begrenzungsstelle eines Bereiches der q-Ebene, in welchem die Koeffizienten $f_\nu(q)$ $(\nu=1, 2, 3\ldots)$ sämtlich regulär sind, und R_{q_0} größer als eine positive Zahl bleibt, gibt es sodann entweder keinen Kreis mit dem Mittelpunkt q_0, in welchem alle die Koeffizienten $f_\nu(q)$ regulär sind, oder aber ist $R_{q_0}=0$, so sind die sämtlichen Stellen (q_0, x) des qx-Bereiches singuläre Punkte für die durch $\varphi(q, x)$ definierte Funktion.

Denken wir uns q_0 als einen der Grenzpunkte $q=e^{\frac{i\varkappa\pi}{\nu}}$ und $q=e^{\frac{is\pi}{\nu+\gamma}}$, so ist unmittelbar ersichtlich, daß es keinen Kreis mit dem Mittelpunkt q_0 gibt, in welchem die Funktionen $f_\nu(q)$ sämtlich regalär sind. Man erkennt weiter, da diese

[1]) Hartogs, a. a. O., p. 29.

Punkte überall dicht auf der Peripherie des Kreises liegen, daß die gleichen Eigenschaften für alle anderen Punkte auf der Peripherie des Kreises gelten. Es folgt daher aus diesem zweiten Satz des Herrn Hartogs, daß für alle Stellen aus dem Kreis $|q| = 1$ die durch $\varphi(q, x)$ definierte Funktion sich singulär verhält.

Lassen wir jetzt γ eine beliebige komplexe Zahl von der Form $a + bi$ sein.

Der Nenner des Quotienten (108) verschwindet für

$$q = e^{\frac{2\pi i \varkappa}{\gamma+\nu}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$= e^{\frac{2b\varkappa\pi}{(a+\nu)^2+b^2}} e^{\frac{2\varkappa(a+\nu)\pi i}{(a+\nu)^2+b^2}},$$

wobei $\varkappa$ eine ganze Zahl ist. An diesen Stellen ist die Bedingung a (S. 59) des ersten Hartogsschen Satzes nicht erfüllt, da solche Punkte singuläre Stellen der Funktionen $f_\nu(q)$ sind. Es folgt daher, daß für diese Punkte die durch $\varphi(q, x)$ definierte Funktion nicht analytisch ist.

Lebenslauf.

Ich Edwin Raymond Smith wurde als Sohn des inzwischen verstorbenen Gutsbesitzers John E. Smith und seiner Gattin Mary am 13. Januar 1879 zu Danville in Illinois U. S. A. geboren und bin protestantischer Konfession. Zur Vorbereitung zum Universitätsstudium besuchte ich die „Academy of the University Illinois“, wo ich 1901 die Reifeprüfung ablegte. Von 1901 bis 1905 war ich an der „University of Illinois“ Urbana in Illinois U. S. A. immatrikuliert und erhielt im Sommer 1905 das Diplom eines „Bachelor of Arts“. Dann war ich vier Jahre als „Instructor in mathematics“ an der „University of Wisconsin“ Madison in Wisconsin U. S. A. tätig. Im Sommer 1908 wurde ich an dieser Universität „Master of Arts“. Im Wintersemester 1909/10 bezog ich die Universität München, wo ich vier Semester die Vorlesungen der Professoren Pringsheim, Lindemann, Voss, Sommerfeld, Seeliger und Graetz besuchte. Allen meinen Lehrern, insbesondere Herrn Professor Pringsheim, spreche ich für die Aufnahme meiner Arbeit auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus.